Графический метод решения систем неравенств в задачах по сферической астрономии

М. И. Волобуева*

Президентский физико-математический лицей № 239, г. Санкт-Петербург

Астрономическое образование

2026, № 1

Аннотация

Произведён анализ методов решения определённого класса задач по сферической астрономии, связанных с расчётом высот светил в кульминациях. Представлен оригинальный метод решения задач данного типа с помощью построения диаграммы «широта — склонение». Рассмотрены примеры решения задач.

Астрономические этюды

Ключевые слова:
сферическая астрономия,
небесная сфера, олимпиадные задачи,
графические методы решения задач

*panther_gatchina@mail.ru

1. Введение

Сферическая астрономия — древнейший раздел астрономии, посвящённый методам определения положений и движений астрономических объектов на небесной сфере и, в частности, построению систем координат. Основы сферической астрономии включены в любой курс общей астрономии. В методических программах олимпиад для школьников вопросы об основных кругах и точках на небесной сфере, горизонтальной и экваториальной системах координат появляются довольно рано: в большинстве случаев они относятся к 7–8-м классам [1; 2], самое позднее — к 9 классу [3]. В процессе знакомства с данным разделом астрономии учащиеся не только получают базовое представление об условиях наблюдений небесных тел, но и развивают пространственное мышление. Как правило, в учебных курсах сразу после введения экваториальной системы координат рассматривается задача о высоте светила в верхней и нижней кульминациях, а также связанные с этим вопросы, например, о «режимах» движения светил в заданной местности (невосходящие и незаходящие звёзды). Причины этого очевидны. В отличие от координат светила в произвольной точке небесной сферы, расчёт которых требует использования громоздких формул сферической тригонометрии (см. [4, гл. 1]), положение светила на небесном меридиане определяется простейшими линейными соотношениями, которые может получить любой школьник, знакомый с геометрическим понятием угла:

$$h_{\text{в.к.}} = 90^\circ - |\varphi - \delta|, \tag{1}$$

$$h_{\text{н.к.}} = |\varphi + \delta| - 90^\circ, \tag{2}$$

где $\varphi \in [-90^\circ; 90^\circ]$ — широта места наблюдения, $\delta \in [-90^\circ; 90^\circ]$ — склонение светила.

Интересно обсудить задачи, которые, с одной стороны, затрагивают только базовые понятия и не требуют для своего решения какого-либо сложного математического аппарата, а с другой стороны — способны вызвать трудности даже у участников олимпиад с высоким уровнем подготовки. Суть рассмотренных задач сводится к анализу положения светила в момент его верхней или нижней кульминации. Практическая сложность представленных заданий состоит в сложносоставном условии: искомые объекты должны удовлетворять сразу нескольким критериям, и необходимо рассмотреть все возможные случаи.

Поступило в редакцию 01.02.2026
После доработки 08.02.2026
В печать 09.03.2026
Опубликовано 20.03.2026

ISSN 3033-7917
journal.astroedu.ru

2. «Классические» приёмы решения задач

Анализ заданий и способов их решения, опубликованных в материалах различных астрономических олимпиад для школьников показывает, что в большинстве случаев для решения задач на расчёт высоты в кульминации используется один из двух подходов: алгебраический или геометрический. Также возможна комбинация этих двух приёмов, когда на разных этапах решения одной и той же задачи используются оба метода. Выбор того или иного подхода определяется контекстом конкретной задачи. Продолжительность соревновательного тура ограничена, поэтому оптимален тот вариант решения, который минимизирует, с одной стороны, затраченное время, а с другой — число возможных ошибок.

2.1. Алгебраический метод

Алгебраический подход подразумевает составление системы уравнений или неравенств, которая затем решается «в лоб» из чисто математических соображений, без привязки к физическому или геометрическому контексту; на последнем шаге ответы, не удовлетворяющие физическому смыслу, отбрасываются.

Проиллюстрируем применение метода на простом примере.

Задача № 1.1

У некоторой звезды на широте $\varphi = 30^\circ$ с. ш. высота в верхней кульминации в 2 раза больше, чем в нижней. Найдите склонение звезды.

Решение. Из уравнений (1), (2) получаем:

$$90^\circ - |\varphi - \delta| = 2 \cdot (|\varphi + \delta| - 90^\circ)\,. \tag{3}$$

Каждый модуль можно раскрыть двумя способами, поэтому получаем четыре варианта:

$$\varphi > \delta,\ \varphi > -\delta: \quad \begin{aligned} 90^\circ - \varphi + \delta &= 2\varphi + 2\delta - 180^\circ,\\ \delta &= 270^\circ - 3\varphi; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\varphi < \delta,\ \varphi > -\delta: \quad \begin{aligned} 90^\circ + \varphi - \delta &= 2\varphi + 2\delta - 180^\circ,\\ \delta &= 90^\circ - \frac{\varphi}{3}; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\varphi > \delta,\ \varphi < -\delta: \quad \begin{aligned} 90^\circ - \varphi + \delta &= -2\varphi - 2\delta - 180^\circ,\\ \delta &= -90^\circ - \frac{\varphi}{3}; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\varphi < \delta,\ \varphi < -\delta: \quad \begin{aligned} 90^\circ + \varphi - \delta &= -2\varphi - 2\delta - 180^\circ,\\ \delta &= -270^\circ - 3\varphi. \end{aligned} \tag{7}$$

В случае $\varphi = 30^\circ$ только вариант (5) имеет физический смысл:

$$\delta = 90^\circ - \frac{\varphi}{3} = 80^\circ. \tag{8}$$

Остальные решения не соответствуют области определения склонения $\delta \in [-90^\circ; 90^\circ]$.

2.2. Геометрический метод

Геометрический подход состоит в использовании чертежа небесной сферы (как правило, в проекции на плоскость небесного меридиана) и вспомогательных построений; в этом случае необходимые взаимосвязи демонстрируются наглядно.

Построим чертёж для рассмотренного в подразд. 2.1 примера, принимая во внимание, что высота Северного полюса мира P над горизонтом равна широте места наблюдения $\varphi = 30^\circ$ (рис. 1).

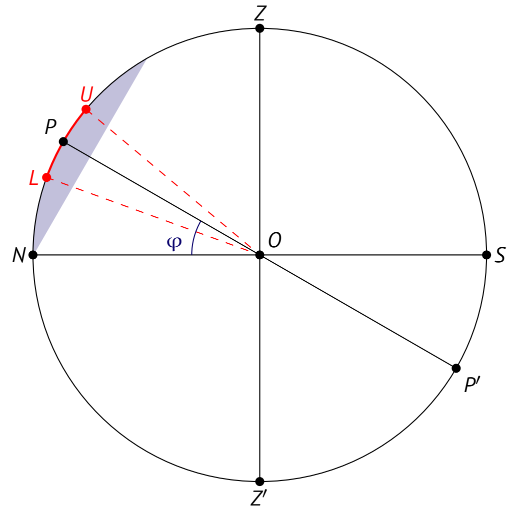

Рис. 1. К геометрическому методу решения задачи № 1.1

Так как высота в верхней кульминации «в 2 раза больше», можно сделать вывод, что обе высоты имеют положительный знак и, следовательно, искомая звезда является незаходящей. Кроме того, она отстоит от Северного полюса мира на угловое расстояние, не превышающее $\varphi = 30^\circ$ (выделенная область на чертеже). Из рисунка становится очевидно, что на заданной широте такие звёзды могут кульминировать только к северу от зенита.

Теперь найдём склонение звезды. Обозначим её положение в верхней и нижней кульминации как U и L соответственно. В кульминациях звезда располагается симметрично относительно Северного полюса мира на угловом расстоянии $LP = PU = 90^\circ - \delta$ от него.

По условию $NU = 2NL$, откуда $NL = LU = 2 \cdot (90° - \delta)$. В то же время $NL = NP - LP = \varphi - (90° - \delta)$. Таким образом,

$$2 \cdot (90° - \delta) = \varphi - (90° - \delta), \tag{9}$$

$$\delta = 90° - \frac{\varphi}{3} = 80°. \tag{10}$$

Отметим, что при решении задачи не понадобились никакие «заранее известные» формулы — всё необходимое было получено непосредственно из чертежа.

2.3. Обсуждение

Каждый из вышеописанных методов обладает своими достоинствами и недостатками.

К достоинствам алгебраического метода относятся ясность и полнота доказательства. К недостаткам можно отнести лишние затраты на рассмотрение решений, существующих с точки зрения математики, но не имеющих смысла в контексте поставленной задачи — так, в рассмотренном примере пригодилось только одно решение из четырёх. В громоздкой системе неравенств легко запутаться и совершить ошибку; при этом число тупиковых ветвей решения может быть значительным.

Геометрический подход хорош своей наглядностью — часто решение можно в буквальном смысле «увидеть». Основной недостаток метода заключается в том, что для построения чертежа требуется «опорный факт», от которого можно оттолкнуться. В приведённом примере таким опорным фактом является известная широта места наблюдения; благодаря этому условию положение основных точек, линий и кругов на чертеже небесной сферы задано однозначно. В общем случае метод требует построения нескольких чертежей для различных соотношений параметров и не даёт уверенности в том, что все возможные случаи рассмотрены.

Оба рассмотренных метода оказываются нерациональными в случае сложносоставного условия и необходимости рассматривать общее решение без конкретных численных данных.

3. Графический метод

В данной работе предлагается иной способ решения задач рассматриваемого типа, заключающийся в графическом решении системы неравенств (или уравнений). Суть метода состоит в построении *диаграммы «широта — склонение»* $(\varphi;\, \delta)$ в декартовых координатах. Так как широта и склонение в рассматриваемых задачах связаны линейно, условие задачи можно представить на диаграмме в виде набора прямых и (или) областей, ограниченных прямыми.

Например, *линии равных высот в кульминации* на такой диаграмме представляют собой прямые с угловым коэффициентом, равным $+1$ для верхней кульминации и -1 для нижней кульминации:

$$\begin{gathered} h_{\text{в.к.}} = 90° - |\varphi - \delta| \\ \delta(\varphi) = +\varphi \pm (90° - h_{\text{в.к.}})\,; \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} h_{\text{н.к.}} = |\varphi + \delta| - 90° \\ \delta(\varphi) = -\varphi \pm (90° + h_{\text{н.к.}})\,. \end{gathered} \tag{12}$$

Исходя из уравнений (11) и (12) несложно обозначить на диаграмме области незаходящих ($h_{\text{н.к.}} > 0°$) и невосходящих ($h_{\text{в.к.}} < 0°$) светил — они располагаются по углам диаграммы (см. рис. 3).

В общем виде решение задачи при указанном подходе можно разделить на следующие шаги:

1. выделение в тексте задачи конкретных свойств, условий и ограничений;
2. запись этих условий в виде уравнений и (или) неравенств и приведение их к удобному виду;
3. представление полученных зависимостей на диаграмме «широта — склонение»;
4. анализ диаграммы.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача № 1.2 [5]

У некоторой звезды высота в верхней кульминации в 2 раза больше, чем в нижней. На каких широтах существуют такие звёзды?

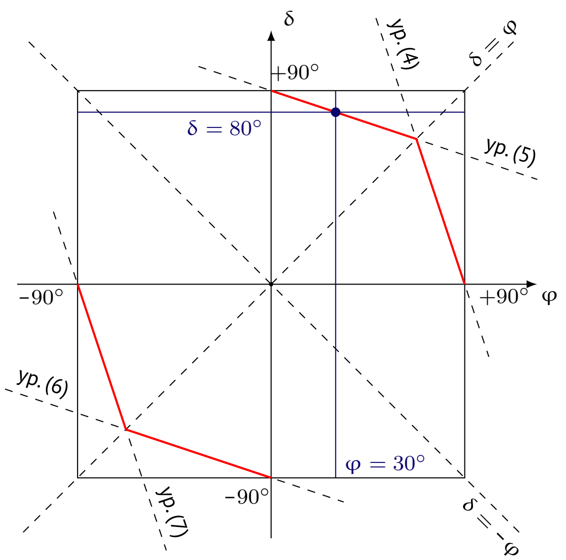

Рис. 2. Диаграмма $(\varphi;\, \delta)$ к задаче № 1.2

Решение. Это усложнённая версия задачи, рассмотренной в подразделах 2.1 и 2.2. Теперь широта места наблюдения неизвестна, и необходимо решить задачу в общем виде. Потеря единственного «опорного факта» делает эту задачу неудобной для решения с помощью геометрического подхода. Алгебраический подход в целом применим, но требует дополнительного анализа: нахождения области существования для каждого из полученных решений (4)–(7) и проверки согласованности результата с начальным предположением в каждом случае.

Решим задачу графическим способом. Для этого изобразим зависимости (4)–(7) на диаграмме $(\varphi;\,\delta)$ (рис. 2). С учётом области определения каждой из зависимостей получаем итоговый результат (выделен красным).

Как видно из диаграммы, звёзды с заданными свойствами существуют для всех широт, включая вырожденные решения для случаев земного экватора («кульминации» полюсов мира на горизонте) и географических полюсов («кульминации» точек небесного экватора на горизонте, поскольку небесный экватор совпадает с горизонтом). Отметим, что диаграмма даёт дополнительные сведения: например, что для любой ненулевой широты решение задачи единственно, а искомые звёзды обязательно незаходящие.

Задача № 2 [6]

Рассмотрим звёзды, высоты которых в верхней и нижней кульминациях одновременно удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} 0^\circ \leqslant h_{\text{в.к.}} \leqslant H, \\ -H \leqslant h_{\text{н.к.}} \leqslant 0^\circ, \end{cases} \qquad \text{где } 0^\circ \leqslant H \leqslant 90^\circ. \tag{13}$$

1. На каких широтах φ найдутся звёзды, удовлетворяющие данным условиям при некотором фиксированном значении H?
2. При каких значениях H на любой широте найдутся такие звёзды?
3. При каких значениях H и φ условию удовлетворяет максимальное количество звёзд?

Считайте, что звёзды распределены на небесной сфере равномерно. Рефракцией пренебрегите.

Решение:

(1) Отметим положение звёзд, удовлетворяющих условию задачи, на диаграмме «широта — склонение» (рис. 3).

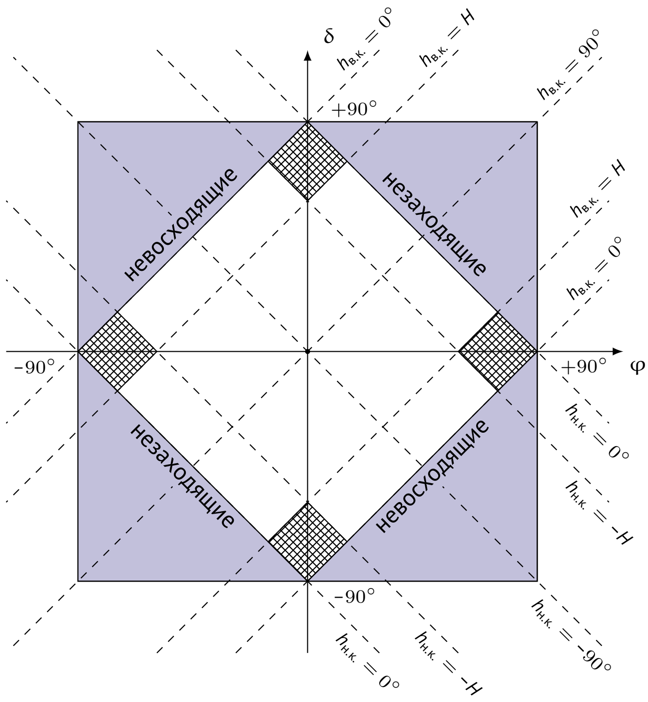

Рис. 3. Диаграмма $(\varphi;\,\delta)$ к задаче № 2

Искомые области (заштрихованы на диаграмме) ограничены прямыми, заданными уравнениями (11) и (12) при $h_{\text{в.к.}} = 0^\circ$, $h_{\text{в.к.}} = H$, $h_{\text{н.к.}} = 0^\circ$ и $h_{\text{н.к.}} = -H$. Как видно из рисунка, эти области представляют собой квадраты с диагональю, равной H, расположенные в точках пересечения координатных осей с границей диаграммы. Таким образом, для наблюдателя вблизи любого из географических полюсов условию задачи удовлетворяют звёзды, близкие к небесному экватору. Для наблюдателя вблизи экватора, наоборот, решением являются околополярные звёзды.

Из диаграммы легко определить широты, на которых можно наблюдать звёзды с указанными свойствами:

$$|\varphi| \geqslant 90^\circ - H \quad \text{или} \quad |\varphi| \leqslant \frac{H}{2}. \tag{14}$$

(2) Решения будут существовать для всех широт, когда указанные диапазоны пересекутся:

$$\frac{H}{2} \geqslant 90^\circ - H \quad \Longrightarrow \quad H \geqslant 60^\circ. \tag{15}$$

Тот же результат можно получить из диаграммы (рис. 4). При увеличении параметра H заштрихованные квадраты пропорционально увеличиваются, занимая незакрашенную центральную область. Чтобы весь диапазон широт длиной 180° «перекрывался» диагоналями трёх квадратов, необходимо

$$3H \geqslant 180^\circ \quad \Longrightarrow \quad H \geqslant 60^\circ. \tag{16}$$

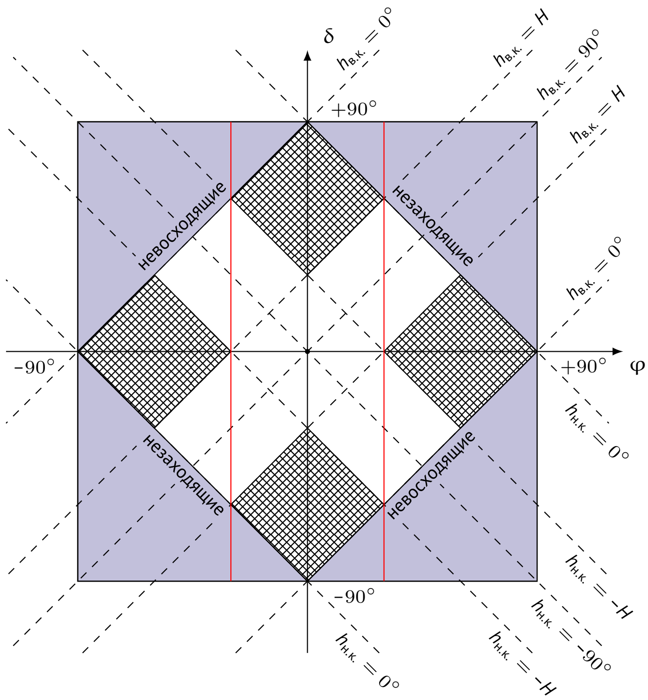

Рис. 4. Вариация диаграммы $(\varphi;\ \delta)$ к задаче № 2. Случай $H = 60°$

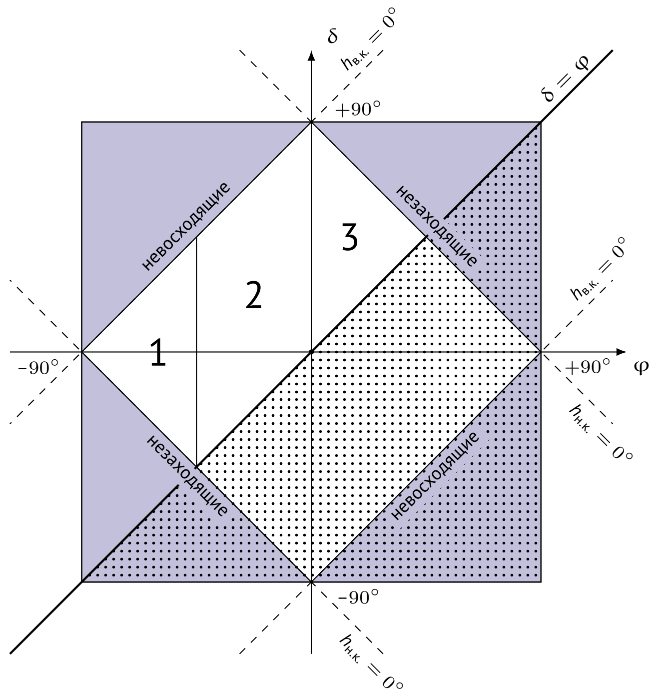

Рис. 5. Диаграмма $(\varphi;\ \delta)$ к задаче № 3

(3) Так как высоты указанных звёзд в верхней кульминации положительны, а в нижней — отрицательны, эти звёзды восходят и заходят. На экваторе ($\varphi = 0°$) восходят и заходят *все* звёзды. Очевидно, что если при этом $H = 90°$, то условию задачи удовлетворяет любая звезда на небесной сфере. На диаграмме это соответствует ситуации, когда верхний и нижний заштрихованные квадраты соприкасаются в начале координат и тем самым «перекрывают» всю ось ординат.

Задача № 3 [7]

Рассмотрим звёзды, удовлетворяющие одновременно двум условиям: в процессе суточного движения они пересекают горизонт, а их верхняя кульминация происходит к северу от зенита.

1. Выразите долю таких звёзд на небесной сфере как функцию широты места наблюдения φ.
2. Определите максимально возможную долю таких звёзд и широту, на которой она достигается.

Считайте, что звёзды распределены на небесной сфере равномерно. Рефракцией пренебрегите.

Решение:

(1) Отметим положение звёзд, удовлетворяющих условию задачи, на диаграмме $(\varphi;\ \delta)$ (рис. 5).

Верхняя кульминация происходит к северу от зенита, если $\delta > \varphi$. Звёзды не пересекают горизонт в двух случаях: либо они незаходящие ($h_{н.к.} > 0°$), либо невосходящие ($h_{в.к.} < 0°$).

Следовательно, искомые звёзды соответствуют незакрашенной области диаграммы. Теперь очевидно, что искомая доля звёзд $\eta(\varphi)$ является кусочно-заданной функцией, поскольку для разных широт φ действуют разные ограничения на склонение δ.

В целом диаграмма разделяется на четыре зоны:

Зона 1:
$$\varphi \in [-90°;\ -45°], \quad -(90° + \varphi) \leqslant \delta \leqslant 90° + \varphi; \tag{17}$$

Зона 2:
$$\varphi \in [-45°;\ 0°], \quad \varphi \leqslant \delta \leqslant 90° + \varphi; \tag{18}$$

Зона 3:
$$\varphi \in [0°;\ +45°], \quad \varphi \leqslant \delta \leqslant 90° - \varphi; \tag{19}$$

Зона 4:
$$\varphi \in [+45°;\ +90°], \quad \delta \in \varnothing. \tag{20}$$

Долю площади небесной сферы, заключенную между граничными суточными параллелями $\delta_{\min}$ и $\delta_{\max}$, можно вычислить, используя формулу площади сферического сегмента $S_{\delta \geqslant \delta_0} = 2\pi R^2(1 - \sin\delta_0)$:

$$\eta = \frac{2\pi R^2(1 - \sin\delta_{\min}) - 2\pi R^2(1 - \sin\delta_{\max})}{4\pi R^2} = \frac{\sin\delta_{\max} - \sin\delta_{\min}}{2}. \tag{21}$$

Теперь выразим искомую долю для каждого диапазона широт:

$$\eta_1 = \frac{\sin(90^\circ + \varphi) - \sin(-90^\circ - \varphi)}{2} = \cos\varphi; \tag{22}$$

$$\eta_2 = \frac{\sin(90^\circ + \varphi) - \sin\varphi}{2} = \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\sqrt{2}}; \tag{23}$$

$$\eta_3 = \frac{\sin(90^\circ - \varphi) - \sin\varphi}{2} = \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\sqrt{2}}; \tag{24}$$

$$\eta_4 = 0. \tag{25}$$

Таким образом,

$$\eta(\varphi) = \begin{cases} \cos\varphi, & \varphi \in [-90^\circ;\ -45^\circ]; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(45^\circ - \varphi), & \varphi \in [-45^\circ;\ +45^\circ]; \\ 0, & \varphi \in [+45^\circ;\ +90^\circ]. \end{cases}$$

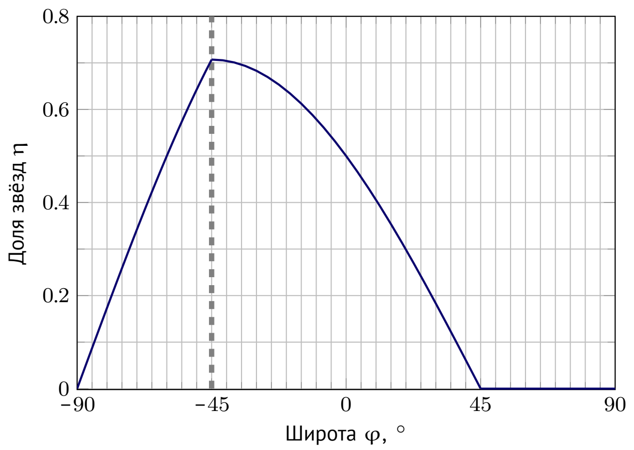

Рис. 6. Зависимость доли искомых звёзд от широты (к задаче № 3)

(2) В зоне 1 функция $\eta(\varphi)$ монотонно возрастает, а в зонах 2 и 3 — убывает (рис. 6). Следовательно, максимум достигается на границе зон 1 и 2, то есть при $\varphi = -45^\circ$, и равен

$$\cos(-45^\circ) = \frac{\sin(45^\circ - (-45^\circ))}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71. \tag{26}$$

4. Заключение

Как показано на примерах, построение диаграммы $(\varphi;\ \delta)$ является удобным и эффективным способом решения некоторого класса задач по сферической астрономии. С одной стороны, этот метод сохраняет математическую строгость и полноту алгебраического подхода, а с другой — наглядность и контроль за сохранением физического смысла, свойственные геометрическому подходу. Кроме того, предложенный метод позволяет взглянуть на привычные закономерности с нового ракурса. Подобная идея имеет метапредметный характер: сложные системы неравенств могут встретиться и в задачах по математике, физике, химии и т. д., и в этих случаях графическое представление также может существенно упростить решение.

Благодарности. Автор выражает благодарность И. А. Утешеву и А. В. Веселовой, принимавшим участие в подготовке и редактуре оригинальных версий задач № 2 и № 3, которые с некоторыми правками и дополнениями были включены в данную работу.

Список литературы

[1] Методическая программа Всероссийской олимпиады школьников по астрономии / Центральная предметно-методическая комиссия ВсОШ по астрономии. 2019. URL: https://vos.astroedu.ru/syllabus.

[2] Методическая программа Олимпиады школьников по астрономии имени В. Я. Струве. URL: https://struve.astroedu.ru/syllabus.

[3] Методическая программа Санкт-Петербургской астрономической олимпиады. URL: http://school.astro.spbu.ru/?q=node/49.

[4] *Кононович Э. В., Мороз В. И.* Общий курс астрономии. М. : Ленанд, 2025. 544 с.

[5] *Угольников О. С.* 9/10 класс, задача № 1 // Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап. 2007. URL: https://vos.astroedu.ru.

[6] *Волобуева М. И.* Теоретический тест Q25S1T, задача № 4 // Серия квалификационных тестов для кандидатов в члены сборной России по астрономии и астрофизике. 2024. URL: https://hq.astroedu.ru.

[7] *Volobueva M.* Theoretical Round, Problem 5 // Open World Astronomy Olympiad. 2024. URL: https://owao.site.