



Астрономическое
образование

2026, № 1

Астрономические этюды

Ключевые слова:

галактическая астрономия,
гравитационный потенциал,
кривая вращения

*linav93@yandex.ru

Гравитационные потенциалы в галактической динамике: модели и задачи

А. В. Веселова*

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация

Статья представляет собой учебно-методический обзор модельных гравитационных потенциалов, применяемых для описания распределения массы в галактиках. Рассмотрены классические сферически симметричные модели (Пламмера, изохронная, степенные, Яффе, Хернквиста и Наварро – Френка – Уайта) и осесимметричная модель Миямото – Нагаи для дисковых компонент. Особое внимание уделено связи между потенциалом, распределением плотности и кривой круговой скорости. В практической части разобраны олимпиадные задачи на движение тел в некеплеровских потенциалах, что делает материал полезным для преподавателей, учащихся старших классов и студентов, интересующихся астрофизикой и небесной механикой.

1. Введение

Изучение орбитального движения в гравитационных полях нетривиальной формы — краеугольный камень как классической небесной механики, так и современной динамики звёздных систем. Понимание эволюции орбит в потенциалах, отличных от ньютоновского потенциала точечной массы, необходимо для решения широкого круга астрофизических задач — от расчёта устойчивости звёздных скоплений и интерпретации кривых вращения галактик до моделирования динамики галактических ядер и гало.

В учебной и олимпиадной практике, однако, часто возникает разрыв между простыми кеплеровскими задачами и сложными современными моделями, используемыми в научной литературе. Данная работа призвана частично заполнить эту нишу, представив последовательный обзор ключевых модельных гравитационных потенциалов, применяемых для описания распределения массы в галактиках.

Основная цель статьи — систематизировать и дать физическую интерпретацию аналитическим моделям потенциала, показав связь между формой потенциала $\Phi(\vec{r})$, распределением плотности $\rho(\vec{r})$ и наблюдаемыми кинематическими профилями, такими как круговая скорость $v_c(r)$. Мы сосредоточимся на моделях, имеющих аналитически выражаемые зависимости, что делает их удобным инструментом для обучения и оценочных расчётов. Большинство рассматриваемых примеров заимствованы из классической монографии Дж. Бинни и С. Тримейна [1], являющейся основополагающим трудом в области галактической динамики.

2. Основные теоретические сведения

2.1. Гравитационный потенциал

Гравитационный потенциал Φ является одним из центральных понятий в теоретической механике и астрофизике и представляет собой потенциальную энергию в расчёте на единицу массы. С другой стороны, это скалярная функция $\Phi(\vec{r})$, определяемая таким образом, чтобы сила, действующая

Поступило в редакцию	04.02.2026
После доработки	10.03.2026
В печать	10.03.2026
Опубликовано	20.03.2026

journal.astroedu.ru

на единичную массу, была равна $-\nabla\Phi$. Здесь ∇ (оператор Гамильтона, набла) обозначает градиент – вектор частных производных по координатам. В простейшем случае сферически симметричного потенциала градиент сводится к полной производной по расстоянию r от центра:

$$\nabla\Phi(r) \equiv \frac{d\Phi}{dr} \vec{e}_r. \quad (1)$$

При исследовании потенциалов гравитирующих систем важен учёт *самосогласованности модели*: распределение плотности массы должно соответствовать распределению гравитационного потенциала, который эта масса создаёт. Связь между этими величинами задаётся *уравнением Пуассона*:

$$\Delta\Phi \equiv \nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (2)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, который в декартовых координатах равен сумме вторых частных производных. В случае сферически симметричного потенциала действие оператора Лапласа имеет вид

$$\Delta\Phi(r) \equiv \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right); \quad (3)$$

при осевой симметрии –

$$\Delta\Phi(R,z) \equiv \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Уравнение Пуассона можно вывести из теоремы Гаусса для гравитационного поля (см. Приложение А).

2.2. Круговая скорость

Одной из ключевых величин в исследованиях галактик является *круговая скорость* v_c , определяемая как скорость тела на круговой орбите в плоскости, перпендикулярной оси симметрии и являющейся плоскостью симметрии системы.

В случае сферически симметричного распределения массы баланс центростремительного и гравитационного ускорений приводит к простому соотношению

$$\frac{v_c^2}{r} = \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (5)$$

где $M(r)$ – масса, заключённая внутри сферы радиуса r . Отсюда круговая скорость выражается как

$$v_c^2(r) = \frac{GM(r)}{r}. \quad (6)$$

При этом используется так называемая теорема Ньютона: при движении пробного тела внутри сферически симметрично распределённого вещества (например, система типа «луковицы» с одинаковой плотностью во всех равноудалённых от центра точках) влияние внешних слоёв скомпенсировано, а движение происходит под действием массы, расположенной ближе к центру, чем пробное тело [1, § 2.2]; [2, § 2.10]. Эта внутренняя масса действует так, как если бы она была сосредоточена в центре симметрии.

В более общем случае, когда потенциал $\Phi(R,z)$ не обладает сферической симметрией, но имеет ось симметрии (ось вращения галактики), круговая скорость в плоскости диска определяется частной производной потенциала по расстоянию R от оси симметрии:

$$v_c^2(R) = R \left. \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right|_{z=0}. \quad (7)$$

Это выражение является прямым следствием уравнения радиального равновесия для кругового движения в осесимметричном потенциале (Приложение В). Аналогичное выражение в сферически симметричном случае имеет вид $v_c^2(r) = r d\Phi/dr$, что непосредственно следует из соотношения $v_c^2/r = GM(r)/r^2$ и связи потенциала с массой.

Таким образом, зная потенциал, можно восстановить профиль круговой скорости. Обратная задача восстановления потенциала по наблюдаемым скоростям сложна и не вполне корректна¹.

3. Примеры потенциалов

3.1. Сферически симметричные потенциалы

Многие звёздные системы до некоторой степени можно описывать сферически симметричными моделями: центральные балджи или гало галактик типа Млечного Пути, эллиптические галактики морфологического класса E0. Такие модели удобны для ознакомления с основными соотношениями теории динамики галактик и не требуют математического аппарата, выходящего за пределы основ математического анализа. Иными словами, они пригодны для самостоятельного изучения заинтересованными учащимися старших классов.

3.1.1. Потенциал точечной массы

Потенциал точечной массы хорошо знаком учащимся по задаче двух тел. Хотя такая модель проста, её до сих пор применяют, например, при учёте гравитации сверхмассивной чёрной дыры в центре Млечного Пути

(разумеется, на большом удалении от чёрной дыры). Потенциал точечной массы M на расстоянии r от неё задаётся выражением

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (8)$$

Круговая скорость при этом равна

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \quad (9)$$

Заметим, что большинство систем конечной массы и протяжённости при достаточно большом удалении от центра имеют такой *кеплеровский характер* кривой вращения.

3.1.2. Потенциал однородного шара

Рассмотрим движение внутри шарообразного распределения массы с постоянной плотностью ρ .

Пока система сохраняет сферическую симметрию, допустимо использовать теорему Ньютона. Тогда в каждый момент времени точка на расстоянии r от центра системы движется под действием тяготения массы $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Круговая скорость выражается соотношением

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} \cdot r. \quad (10)$$

Заметим, что в таком случае период обращения по орбите не зависит от радиуса орбиты:

$$T(r) = \frac{2\pi r}{v_c(r)} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}. \quad (11)$$

Выражение для потенциала внутри шара радиуса a получим интегрированием:

$$\Phi(r) = -\int_r^a \frac{4\pi G\rho \tilde{r}^2}{3\tilde{r}} d\tilde{r} = -\frac{2}{3}\pi G\rho(a^2 - r^2) + C. \quad (12)$$

Постоянную интегрирования найдём из условия непрерывности потенциала на поверхности шара: $\Phi(a)$ должна совпадать с потенциалом, создаваемым материальной точкой той же полной массы на расстоянии a . Тогда

$$-\frac{2}{3}\pi G\rho(a^2 - a^2) + C = -\frac{4\pi G\rho a^3}{3a}, \quad (13)$$

$$C = -\frac{4\pi G\rho a^2}{3}. \quad (14)$$

Следовательно, для точки внутри шара получаем

$$\Phi(r) = -2\pi G\rho \left(a^2 - \frac{1}{3}r^2 \right). \quad (15)$$

Отметим, что такая модель популярна в школьных задачах – например, о движении тел внутри глубоких шахт или тоннелей, прокопанных внутри астероидов (см., например, [3, № 1.165–1.168]).

3.1.3. Сфера Пламмера

Наблюдения шаровидных звёздных систем показывают, что вблизи центральных областей плотность практически постоянна, а на больших расстояниях от центра довольно резко устремляется к нулю. Почти постоянной плотности вблизи центра можно добиться, если потенциал ведёт себя как $\Phi(r) \propto (r^2 + \text{const})$ при малых r . В таком приближении лапласиан потенциала оказывается константой, а согласно уравнению Пуассона это соответствует постоянной плотности.

Примером потенциала подходящего вида служит так называемая сфера Пламмера, задаваемая выражением

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}}, \quad (16)$$

где M – полная масса системы. Справедливость приближения при малых r можно показать следующим образом, используя приближённые вычисления:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + b^2}} = \frac{1}{b\sqrt{\frac{r^2}{b^2} + 1}} \approx \frac{1}{b} \left(1 - \frac{r^2}{2b^2} \right). \quad (17)$$

При $r \rightarrow +\infty$ потенциал ведёт себя как $1/r$, что соответствует потенциалу точечной массы – сказывается весьма быстрое спадание плотности, как мы увидим ниже.

Распределение плотности выразим, используя уравнение Пуассона:

$$\rho(r) = \frac{\Delta\Phi(r)}{4\pi G} = \frac{3Mb^2}{4\pi(r^2 + b^2)^{5/2}}. \quad (18)$$

Заметим, что при $r \rightarrow +\infty$ плотность спадает как $1/r^5$, вследствие чего модель удобна для описания чётко очерченных шарообразных систем – например, галактических балджей. При $r \rightarrow 0$ получаем

$$\rho(r) \sim \frac{3M}{4\pi b^3} \left(1 - \frac{5}{2} \frac{r^2}{b^2} \right), \quad (19)$$

то есть конечную величину при $r = 0$ и параболическое приближение вблизи нуля. Такая асимптотика, к сожалению, не слишком реалистична по сравнению с наблюдательными данными для, например, шаровых скоплений: плотность в центральной области часто демонстрирует резкий рост вместо выхода на постоянное значение.

Зависимость круговой скорости от расстояния имеет вид:

$$v_c(r) = \sqrt{r \cdot \frac{d\Phi}{dr}} = \frac{\sqrt{GM}r}{(r^2 + b^2)^{3/4}}. \quad (20)$$

При $r \rightarrow 0$ скорость обращается в нуль, что естественно, а при $r \rightarrow +\infty$ имеем $v_c(r) \sim 1/\sqrt{r}$ – как у точечной массы. Наблюдаемые плато кривых вращения галактик такая модель воспроизвести не может: для периферии галактик нужны другие модели структурных компонент.

Отметим также, что потенциал Пламмера является одним из решений уравнения Лейна – Эмдена, применяемого в физике звёзд и представляющего собой безразмерный вариант уравнения Пуассона для самогравитирующей политропной жидкости.

3.1.4. Изохронный потенциал

Небольшой, на первый взгляд, модификацией сферы Пламмера является изохронный потенциал:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}. \quad (21)$$

Здесь M снова обозначает полную массу системы. Тем не менее такая модель обладает существенно иными свойствами. В сферически симметричном гравитационном поле орбиты являются плоскими (момент импульса сохраняется как вектор и задаёт плоскость движения тела), но далеко не всегда – замкнутыми. Обычно это «розетки», для которых периоды колебаний по расстоянию от центра и по азимуту несоизмеримы. Период радиальных колебаний определяется как полной энергией, так и моментом импульса, но для изохронного потенциала – только полной энергией (см. [1, § 2.2]). Как следствие, исследование орбит в таком потенциале проводится заметно проще, чем в иных.

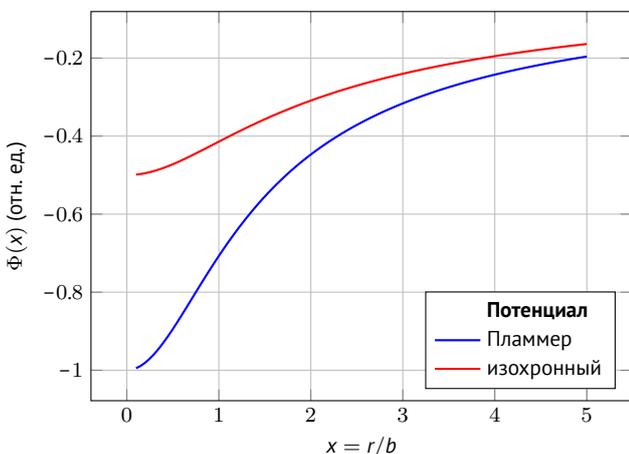


Рис. 1. Сравнение потенциалов Пламмера и изохронного. Значения потенциалов нормированы на GM/b

На рис. 1 показаны характерные профили обсуждаемых потенциалов. Как видно, изохронный потенциал ведёт себя более плавно в центральной области ($r \lesssim b$) и быстрее стремится к нулю на периферии по сравнению с потенциалом Пламмера. Это отражает более «мягкое» ядро изохронной модели.

Распределение плотности в таком потенциале выглядит сложнее. Введём обозначение $u = \sqrt{b^2 + r^2}$, тогда

$$\rho(r) = \frac{\Delta\Phi(r)}{4\pi G} = M \frac{3(b+u)u^2 - r^2(b+3u)}{4\pi(b+u)^3u^3}. \quad (22)$$

При $r \rightarrow 0$ плотность конечна:

$$\rho(0) = \frac{3M}{16\pi b^3}. \quad (23)$$

Это, как и в случае сферы Пламмера, нехарактерно для реальных систем. При $r \rightarrow \infty$ плотность спадает как $1/r^4$, что позволяет применять модель для описания систем конечных размеров.

Зависимость круговой скорости от расстояния выглядит весьма просто:

$$v_c(r) = \sqrt{r \cdot \frac{d\Phi}{dr}} = \frac{\sqrt{GM}r}{(b+u)\sqrt{u}}. \quad (24)$$

Как и в случае сферы Пламмера, она даёт нулевую скорость в центральной области и кеплеровское убывание $\propto 1/\sqrt{r}$ на больших расстояниях.

На рис. 2 представлены соответствующие кривые вращения. Изохронный потенциал даёт более широкий и смещённый максимум по сравнению с потенциалом Пламмера, что также отражает его более «мягкое» ядро. Обе модели, однако, не способны воспроизвести протяжённое плато, характерное для кривых вращения спиральных галактик.

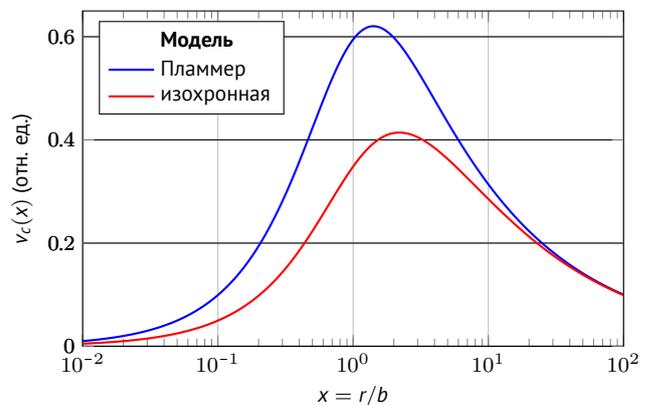


Рис. 2. Кривые вращения для потенциалов Пламмера и изохронного. Обе модели показывают подъём скорости на малых расстояниях ($x < 1$), максимумы при $x \approx 1 \div 1.5$ и кеплеровское убывание на периферии. Изохронный потенциал даёт более широкий максимум

3.1.5. Степенная зависимость плотности

В ряде случаев при построении модели можно отталкиваться не от наблюдаемых в действительности характеристик, а от простоты используемых соотношений. Предположим, что распределение плотности имеет степенной вид (что в целом соответствует резкому повышению плотности в центральных областях наблюдаемых систем):

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^\alpha. \quad (25)$$

Показатель степени α должен быть физически осмысленным; по крайней мере, $\alpha \geq 0$. Дополнительные условия могут накладывать более жёсткие ограничения.

Найдём массу, заключённую внутри сферы радиуса r :

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r \rho(\tilde{r}) 4\pi\tilde{r}^2 d\tilde{r} = \\ &= 4\pi\rho_0 r_0^\alpha \int_0^r \tilde{r}^{2-\alpha} d\tilde{r} = \frac{4\pi\rho_0 r_0^\alpha}{3-\alpha} \tilde{r}^{3-\alpha} \Big|_0^r. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что при $\alpha > 3$ масса расходится в нуле, а при $\alpha \leq 3$ – на бесконечности. Вследствие таких особенностей чисто степенные плотности не используют на практике; вместо этого применяют составные профили плотности, каждая из компонент которых отвечает за распределение в малом или большом масштабе.

Другое ограничение на α можно получить, рассматривая плоскую кривую вращения. Зависимость круговой скорости от расстояния имеет вид

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 r_0^\alpha}{3-\alpha} r^{2-\alpha}}. \quad (27)$$

Плоская кривая вращения реализуется при $\alpha = 2$ (модель изотермической сферы), но при этом интеграл для полной массы расходится. Нечто подобное можно ожидать при моделировании тёмного гало.

Наконец, найдём выражение для потенциала:

$$\Phi(r) - \Phi(r_0) = G \int_{r_0}^r \frac{M(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} d\tilde{r} = \frac{4\pi G\rho_0 r_0^\alpha}{3-\alpha} \int_{r_0}^r \tilde{r}^{1-\alpha} d\tilde{r}. \quad (28)$$

Выполняя интегрирование, получаем

$$\Phi(r) - \Phi(r_0) = \begin{cases} v_c^2 \ln(r/r_0), & \alpha = 2, \\ \frac{v_c^2(r_0) - v_c^2(r)}{\alpha - 2}, & \alpha \neq 2. \end{cases} \quad (29)$$

Заметим, что плоской кривой вращения соответствует особый – *логарифмический* – потенциал, пропорциональный квадрату скорости на плато.

3.1.6. Плотность с двумя показателями степени

Наблюдения эллиптических галактик показывают, что распределение плотности соответствует разным показателям степени на малых и больших расстояниях от центра системы. Модифицируем модельное распределение плотности, введя два показателя степени:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^\alpha \left(1 + \frac{r}{a}\right)^{\beta-\alpha}}. \quad (30)$$

При $r \rightarrow 0$ плотность $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$, а при $r \rightarrow +\infty$ – $r^{-\beta}$.

Семейство профилей при $\beta = 4$ часто называют моделями Денена. Параметрам $\alpha = 1$, $\beta = 4$ соответствует потенциал Хернквиста, а $\alpha = 2$, $\beta = 4$ – потенциал Яффе. Такие модели используют для моделирования балджей спиральных галактик или центральных областей эллиптических галактик.

Гало тёмной материи лучше соответствуют моделям с $\beta = 3$ и $\alpha \in (1; 1.5)$. При $\alpha = 1$, $\beta = 3$ модель называется потенциалом Наварро – Френка – Уайта (NFW).

Для трёх именных моделей найдём массу, заключённую внутри сферы радиуса r , и соответствующие круговую скорость и потенциал:

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \int_0^{r/a} \frac{s^{2-\alpha}}{(1+s)^{\beta-\alpha}} ds; \quad (31)$$

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}; \quad (32)$$

$$\Phi(r) = -G \int_r^\infty \frac{M(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} d\tilde{r}. \quad (33)$$

Результаты приведены в таблице 1.

В первых двух моделях полная масса конечна, а в последней – бесконечна, что удобно при моделировании массивного гало тёмной материи: основная доля его массы проявляется именно во внешних областях галактики.

Для сравнения кинематических свойств на рис. 3 представлены кривые вращения для рассматриваемых моделей. Видно, что каждая модель обладает характерной формой кривой вращения. Модель Яффе имеет ненулевую скорость в центре; такая форма не вполне реалистична для наблюдаемых галактик.

Таблица 1. Масса, круговая скорость и потенциал для моделей Яффе, Хернквиста и NFW ($x \equiv r/a$)

Модель	Масса $M(r) / (4\pi\rho_0 a^3)$	Круговая скорость $v_c(r) / (\sqrt{4\pi G\rho_0} a)$	Потенциал $-\Phi(r) / (4\pi G\rho_0 a^2)$
Яффе	$\frac{x}{1+x}$	$\sqrt{\frac{1}{1+x}}$	$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
Хернквист	$\frac{x^2}{2(1+x)^2}$	$\sqrt{\frac{x}{2(1+x)^2}}$	$\frac{1}{2(1+x)}$
NFW	$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$	$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x} - \frac{1}{1+x}}$	$\frac{\ln(1+x)}{x}$

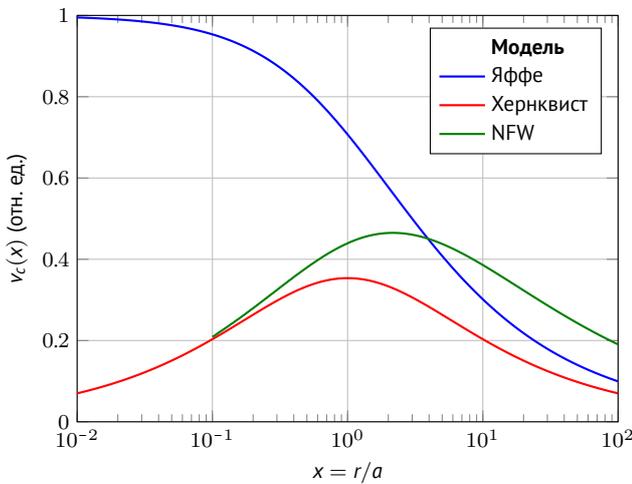


Рис. 3. Кривые вращения моделей Яффе, Хернквиста и NFW

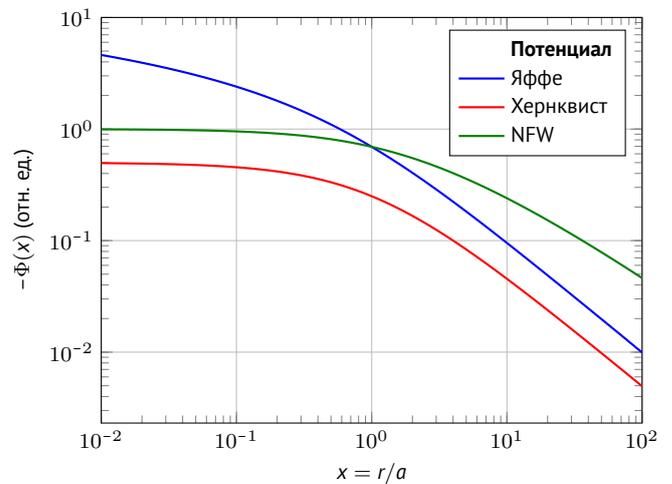


Рис. 4. Безразмерные потенциалы моделей Яффе, Хернквиста и NFW

Модель Хернквиста стартует из нуля и после достижения максимума медленно убывает – это типично для галактических балджей. Модель NFW также имеет нулевую скорость в центре и широкое плато на промежуточных расстояниях, что в целом соответствует наблюдаемым кривым вращения галактик с тёмным гало.

Также на рис. 4 представлены безразмерные потенциалы (без общего множителя и знака) в двойном логарифмическом масштабе. Модель Яффе имеет наиболее резкое изменение потенциала в центральных областях ($r \ll a$), в то время как модель NFW – наиболее пологое. Модель Хернквиста занимает промежуточное положение. На больших расстояниях ($r \gg a$) все три модели дают степенное убывание потенциала, но с разными показателями.

3.2. Осесимметричные потенциалы на примере модели Миямото – Нагаи

Для моделирования спиральных и линзовидных галактик требуются осесимметричные модели, описывающие дисковые компоненты – газовые или звёздные

диски. Одной из наиболее популярных является модель Миямото – Нагаи; ограничимся её рассмотрением.

В цилиндрических координатах потенциал задаётся выражением

$$\Phi(R, z) = - \frac{GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}. \tag{34}$$

Модель содержит два геометрических параметра a и b , задающих сплюснутость эквипотенциальных поверхностей. При $a = 0$ она переходит в сферически симметричную модель Пламмера, а при $b = 0$ описывает бесконечно тонкий диск.

Выражение для плотности получается более громоздким:

$$\rho_M(R, z) = \frac{1}{4\pi G} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] = \frac{b^2 M}{4\pi} \frac{aR^2 + (a + 3\sqrt{z^2 + b^2})(a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}{\left[R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2 \right]^{5/2} (z^2 + b^2)^{3/2}}. \tag{35}$$

В плоскости диска при $z = 0$ и на больших расстояниях R плотность спадает как R^{-3} . Вдали от плоскости диска плотность спадает пропорционально z^{-5} .

Кривая вращения для осесимметричных систем обычно рассматривается в плоскости симметрии диска:

$$v_c^2(R) = R \left. \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right|_{z=0} = \frac{GMR^2}{[R^2 + (a+b)^2]^{3/2}}. \quad (36)$$

В центре системы скорость равна нулю, а на больших расстояниях убывает как $1/\sqrt{R}$, как и у прочих моделей конечной массы.

3.3. Коротко о моделях Млечного Пути

С помощью упомянутых выше и иных моделей можно конструировать модели галактик, по общим характеристикам напоминающие наблюдаемые. Так, модель нашей Галактики может быть представлена сочетанием сферы Пламмера (центральный балдж), диска Миямото – Нагаи (звёздно-газовый диск) и потенциала Наварро – Френка – Уайта (гало тёмной материи). Параметры одной из реалистичных моделей приведены в таблице 2. Соответствующая кривая вращения показана на рис. 5. Значение скорости в окрестности Солнца ($R_\odot \approx 8$ кпк) кажется несколько завышенным, однако оценки по данным о мазерных источниках действительно дают круговую скорость порядка 240 км/с.

Таблица 2. Параметры упрощённой модели Млечного Пути [4]

Компонент (модель)	Масса	Масштабы
Балдж (Пламмер)	$M_b = 1.03 \cdot 10^{10} M_\odot$	$b_b = 0.2672$ кпк
Диск (Миямото – Нагаи)	$M_d = 6.51 \cdot 10^{10} M_\odot$	$a_d = 4.4000$ кпк, $b_d = 0.3084$ кпк
Гало (NFW)	$M_h = 2.90 \cdot 10^{11} M_\odot$	$a_h = 7.7000$ кпк

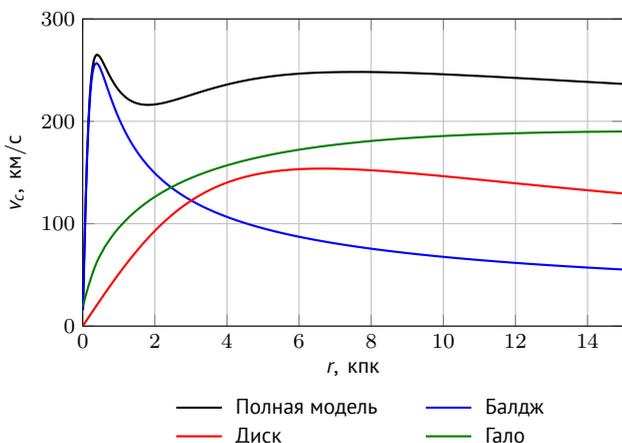


Рис. 5. Кривая вращения для трёхкомпонентной осесимметричной модели потенциала Млечного Пути

Это лишь упрощённая версия модели: так, в центральной части Млечного Пути присутствует эллипсоидальная перемычка — бар, потенциал которой выражается через специальные функции. Диск сам по себе неоднороден, поэтому его следует разделять на несколько компонент. Кроме того, диск не является строго осесимметричным, а его средняя плоскость искривлена...

Несмотря на непрерывный рост наших знаний о Млечном Пути, многие моменты до сих пор остаются невыясненными, а создаваемые модели пока не в полной мере описывают наблюдаемые характеристики. Подробный обзор современных представлений о характеристиках Млечного Пути можно найти в [5].

4. Примеры заданий

В том или ином виде задания о движении тел в некеплеровом потенциале встречаются в олимпиадной среде довольно давно. Разберём несколько примеров из Санкт-Петербургской астрономической олимпиады, Всероссийской олимпиады школьников по астрономии, а также из квалификационных тестов для кандидатов в члены сборной России по астрономии и астрофизике. Условия и решения приведены по первоисточникам и снабжены замечаниями и комментариями, вынесенными отдельно.

4.1. Синодический период в модели однородного шара [6]

В центральной части шарообразной эллиптической галактики вокруг её центра обращаются две звезды. Орбиты обеих звёзд круговые, лежат в одной плоскости, направления вращения совпадают. Радиус орбиты первой звезды составляет 100 пк, а второй — 50 пк. Найдите синодический период этих двух звёзд, то есть период между повторением одинакового взаимного расположения двух звёзд и центра галактики, если известно, что в центральной части галактики звёзды распределены примерно однородно, а концентрация звёзд составляет около $10^4 M_\odot/\text{пк}^3$.

Решение. Галактика является сферически симметричной, поэтому для каждой из звёзд внешние относительно её орбиты части галактики не влияют на движение, а внутренние можно заменить материальной точкой соответствующей массы, находящейся в центре галактики.

Пусть орбита звезды имеет радиус r . Тогда массу галактики внутри этого радиуса можно вычислить как $M_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, где ρ — плотность вещества внутри сферы

радиуса r . Скорость движения по круговой орбите вокруг точки такой массы составляет

$$v = \sqrt{\frac{GM_r}{r}} = \sqrt{\frac{4G\pi r^3 \rho}{3r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{3}} r, \quad (37)$$

то есть она пропорциональна радиусу орбиты. Это означает, что угловая скорость движения звезды $\omega = v/r$ от радиуса орбиты не зависит. Следовательно, обе звезды вращаются с одинаковой угловой скоростью, их взаимное положение относительно центра галактики не меняется со временем, поэтому синодический период стремится к бесконечности.

4.2. Модель Яффе: асимптотика [7]

В модели Яффе для сферически симметричного распределения материи в галактике масса внутри сферы радиуса r зависит от r как

$$M(r) = 4\pi\rho_0 a^3 \cdot \frac{r/a}{1 + r/a}. \quad (38)$$

Здесь ρ_0 – плотность в центре галактики, а a – масштабный параметр системы.

1. Получите формулу зависимости плотности от расстояния $\rho(r)$.
2. Получите зависимость скорости на круговой орбите от расстояния $v_c(r)$. Как выглядит зависимость при $r \rightarrow +\infty$ и при $r \rightarrow 0$?
3. Представим, что в поле тяготения такой галактики в одной плоскости и в одном направлении по круговым орбитам движутся две звезды. Радиус орбиты первой равен $2a$, радиус орбиты второй – a . Чему равна максимальная наблюдаемая лучевая скорость второй звезды при наблюдении с первой?

Решение:

(1) Пусть внутри сферы радиуса r заключена масса $M(r)$. Рассмотрим дополнительный тонкий сферический слой толщины dr . Его масса, с одной стороны, равна $dM = M(r+dr) - M(r)$, а с другой стороны – объёму слоя, умноженному на характерную плотность: $4\pi r^2 \rho(r) dr$. Следовательно,

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (39)$$

$$4\pi\rho_0 a^3 \cdot \frac{\frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) - \frac{r}{a^2}}{\left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (40)$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 a^2}{r^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2} = \frac{\rho_0}{\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2}. \quad (41)$$

(2) Распределение плотности сферически симметрично. В таком случае орбиты свободно движущихся тел плоские, что придаёт смысл рассмотрению круговых орбит. Кроме того, выполняется теорема Ньютона: если материальная точка находится на расстоянии r от центра системы, то она движется в поле тяготения массы, заключённой внутри сферы радиуса r , а вклад внешних слоёв скомпенсирован. Следовательно, круговая скорость задаётся соотношением

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^2}{1 + \frac{r}{a}}}. \quad (42)$$

При $r \rightarrow 0$ второе слагаемое в знаменателе становится малым²,

$$v_c(r) \sim \sqrt{4\pi G\rho_0 a^2} \left(1 - \frac{r}{2a}\right), \quad (43)$$

и величина скорости стремится к $v_c(0) = \sqrt{4\pi G\rho_0 a^2}$.

При $r \rightarrow +\infty$ в знаменателе можно пренебречь единицей по сравнению с r/a , и тогда

$$v_c(r) \sim \sqrt{\frac{4\pi G\rho_0 a^3}{r}}. \quad (44)$$

Это практически кеплеровское убывание, поскольку при $r \rightarrow +\infty$ полная масса остаётся конечной.

(3) Нарисуем схему движения звёзд в плоскости их орбит. Наблюдаемая лучевая скорость равна разности лучевых скоростей наблюдаемой звезды и наблюдателя. Пусть l – угол в точке наблюдателя между направлениями на наблюдаемую звезду и на центр галактики, а λ – центральный угол между направлениями на звёзды.

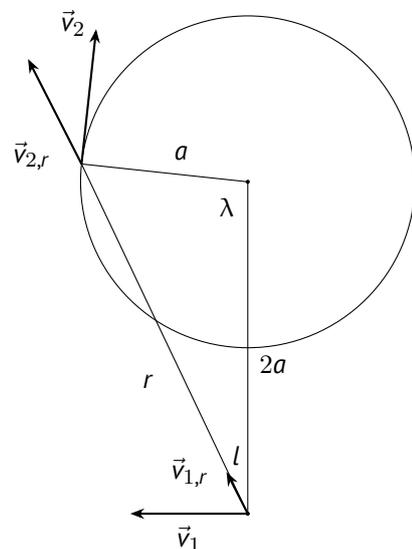


Рис. 6. К выводу формулы для лучевой скорости звезды в галактике

Лучевая компонента скорости наблюдателя равна $v_{1,r} = v_1 \sin l$; скорости второй звезды –

$$v_{2,r} = v_2 \cos(l + \lambda - 90^\circ) = v_2 \sin(l + \lambda). \quad (45)$$

Теорема синусов для треугольника, образованного звёздами и центром системы, даёт

$$\frac{\sin(180^\circ - \lambda - l)}{2a} = \frac{\sin l}{a}, \quad (46)$$

$$\sin(l + \lambda) = 2 \sin l. \quad (47)$$

Тогда наблюдаемая лучевая скорость равна

$$v_r = v_{2,r} - v_{1,r} = (2v_2 - v_1) \sin l. \quad (48)$$

Величины орбитальных скоростей зависят только от радиусов орбит. Следовательно, максимальная наблюдаемая скорость достигается при максимальном $\sin l$, то есть при касательном направлении луча зрения к орбите второй звезды³. В этом случае $\sin l = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

Запишем выражения для круговой скорости на радиусах $r = a$ и $r = 2a$:

$$v_2 = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 a^2}{1 + \frac{a}{a}}} = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 a^2}{2}}, \quad (49)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 a^2}{1 + \frac{2a}{a}}} = \sqrt{\frac{4\pi G \rho_0 a^2}{3}}; \quad (50)$$

$$v_{r,\max} = v_2 - \frac{1}{2}v_1 = \sqrt{4\pi G \rho_0 a^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right). \quad (51)$$

4.3. Две модели балджа [8]

Перед тем как использовать в расчётах ту или иную модель потенциала Галактики, полезно проверить, согласуется ли получаемая по ней кривая вращения с наблюдаемой, а также оценить вклад каждой компоненты потенциала в общую кривую вращения. Так, в работе [9] рассмотрены несколько вариантов моделей потенциала балджа. В основной модели потенциал балджа задаётся потенциалом Пламмера:

$$\Phi_P(r) = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \quad M = 0.78 \cdot 10^{10} M_\odot, \quad c = 0.3 \text{ кпк},$$

где r – галактоцентрическое расстояние. Также была рассмотрена модель с изохронным потенциалом:

$$\Phi_i(r) = -\frac{G\tilde{M}}{b + \sqrt{b^2 + r^2}}, \quad b = 0.15 \text{ кпк}.$$

1. Рассмотрим центральную область Галактики и изучим поведение кривой вращения, задаваемой только

балджем. Чему равна максимальная круговая скорость v_{\max} в такой модели, и на каком расстоянии r_v она достигается?

2. Чему должна быть равна масса балджа \tilde{M} , чтобы значение скорости в модели изохронного балджа на расстоянии r_v было равно тому же значению v_{\max} ? В изохронной модели это уже не обязательно максимум кривой вращения.

Решение:

(1) Круговая скорость связана с потенциалом как

$$v_c^2(r) = r \frac{d\Phi}{dr}. \quad (52)$$

В случае модели Пламмера

$$v_c^2(r) = \frac{GM r^2}{(r^2 + c^2)^{3/2}}. \quad (53)$$

В точке с максимальным значением скорости квадрат скорости также максимален. Ищем максимум $v_c^2(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c^2(r)}{dr} &= \frac{2GM r}{(r^2 + c^2)^{3/2}} - \frac{3GM r^3}{(r^2 + c^2)^{5/2}} = \\ &= \frac{GM r}{(r^2 + c^2)^{5/2}} (2c^2 - r^2) = 0. \end{aligned} \quad (54)$$

При $r = 0$ скорость нулевая, а второй экстремум достигается при $r_v = \sqrt{2}c \approx 0.42$ кпк и соответствует максимуму на кривой вращения. Значение квадрата скорости при этом равно

$$v_c^2(\sqrt{2}c) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{GM}{c}, \quad (55)$$

а сама максимальная скорость $v_{\max} = 208$ км/с.

(2) Выведем формулу квадрата круговой скорости для изохронного потенциала:

$$v_c^2(r) = r \frac{d\Phi_i}{dr} = \frac{G\tilde{M} r^2}{\sqrt{r^2 + b^2} (\sqrt{r^2 + b^2} + b)^2}. \quad (56)$$

Приравниваем значения квадратов круговой скорости на требуемом расстоянии $r_v = \sqrt{2}c$:

$$\frac{G\tilde{M} \cdot 2c^2}{\sqrt{2c^2 + b^2} (\sqrt{2c^2 + b^2} + b)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{GM}{c}. \quad (57)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{\sqrt{2c^2 + b^2} (\sqrt{2c^2 + b^2} + b)^2}{c^3} \cdot M = \\ &= 1.15M = 0.90 \cdot 10^{10} M_\odot. \end{aligned} \quad (58)$$

5. Заключение

В данной работе был проведён систематический обзор основных модельных гравитационных потенциалов, используемых в динамике звёздных систем. Рассмотрение началось с фундаментальных сферически симметричных моделей — потенциала точечной массы, однородного шара, сферы Платмера и изохронного потенциала, — где были явно выведены связи между распределением плотности, потенциалом и кривой круговой скорости. Показано, что выбор модели диктуется как физической реалистичностью, так и соображениями математической простоты и удобства анализа орбит.

Далее были рассмотрены более сложные модели, включая степенные законы плотности, двухпараметрические модели семейства Денена (Хернквиста, Яффе, Наварро — Френка — Уайта) и осесимметричную модель Миямото — Нагаи для дисковых компонент галактик. В каждом случае продемонстрированы характерные асимптотики распределения плотности и кривых вращения, что позволяет понять, какие наблюдательные особенности галактик могут быть описаны той или иной моделью.

Особое внимание уделено практическому применению рассмотренных моделей в олимпиадных и учебных задачах. Разобранные примеры иллюстрируют, как знание аналитического вида потенциала позволяет решать нетривиальные задачи о движении тел в некеплеровских полях, определять синодические периоды, вычислять наблюдаемые лучевые скорости и строить кривые вращения.

Благодарности. Автор выражает благодарность доценту кафедры небесной механики СПбГУ И. И. Никифорову за ценные замечания и советы.

Примечания

1 Во-первых, относительно просто (спектроскопически) измеряется лишь лучевая компонента скорости объектов. Во-вторых, реальные звёзды на протяжении своей жизни переходят с почти круговых на более вытянутые и даже наклонные орбиты. Наконец, в ходе моделирования некоторые параметры модели могут оказаться скоррелированными, то есть определить их независимо невозможно.

2 При проверке работ на олимпиаде было выявлено непонимание многими участниками различия понятий «предел» и «зависимость» при устремлении переменной к тому или иному значению. От участников требовалось показать *асимптотическое поведение* скорости, оставив в выражении только главные по r слагаемые.

3 Понятие *тангенциальных точек* важно в галактической астрономии при исследовании распределения материи в диске галактики по спектру.

Список литературы

- [1] Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics. 2-е изд. Princeton : Princeton University Press, 2008. 903 с. ISBN 978-0-691-13027-9.
- [2] Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии. 2-е изд. М. : УПСС, 2004. 544 с. ISBN 5-354-00866-2.
- [3] Методическое пособие по физике для учащихся старших классов и абитуриентов / Д. А. Александров [и др.] ; под ред. Ю. В. Чешев. 6-е изд. М. : Физматкнига, 2017. 432 с. ISBN 978-5-89155-289-0.
- [4] Bajkova A. T., Bobylev V. V. Orbits of 152 globular clusters of the Milky Way galaxy constructed from Gaia DR2 // Research in Astronomy and Astrophysics. 2021. Т. 21.
- [5] Bland-Hawthorn J., Gerhard O. The Galaxy in Context: Structural, Kinematic & Integrated Properties // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 2016. Т. 54. С. 529–596.
- [6] Тараканов П. А. 10 класс, задача № 3 // XX Санкт-Петербургская астрономическая олимпиада. 2013. URL: <https://school.astro.spbu.ru>.
- [7] Веселова А. В. 11 класс, задача № 6 // Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап. 2025. URL: <https://vos.astroedu.ru>.
- [8] Веселова А. В. Теоретический тест Q22S1T, задача № 6 // Серия квалификационных тестов для кандидатов в члены сборной России по астрономии и астрофизике. 2021. URL: <https://hq.astroedu.ru>.
- [9] Nikiforov I. I., Veselova A. V. On the possible orbital motion of Sgr A* in the smooth potential of the Milky Way // Research in Astronomy and Astrophysics. 2020. Т. 20.
- [10] Серкерев С. А. Теория гравитационного и магнитного потенциалов : учебник для вузов. М. : Недра, 1990. 304 с. ISBN 5-247-00749-2.

Приложение А. Вывод уравнения Пуассона

Напомним, что напряжённость гравитационного поля \vec{g} определяется как сила, действующая на единичную массу. Для точечной массы M она равна $\vec{g} = -(GM/r^2) \vec{e}_r$.

Теорема Гаусса утверждает, что поток вектора \vec{g} через замкнутую поверхность S прямо пропорционален массе $M_{\text{внутр}}$, заключённой в объёме, ограниченном этой поверхностью, с коэффициентом пропорциональности, равным $-4\pi G$, то есть

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{внутр}}. \quad (59)$$

Масса внутри поверхности выражается через интеграл от плотности: $M_{\text{внутр}} = \int_V \rho dV$. Применяя теорему Остроградского — Гаусса к левой части (59), получаем

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_V \nabla \cdot \vec{g} dV. \quad (60)$$

Таким образом,

$$\int_V \nabla \cdot \vec{g} dV = -4\pi G \int_V \rho dV. \quad (61)$$

Поскольку это равенство справедливо для любого объёма V , подынтегральные выражения должны совпадать:

$$\nabla \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho. \quad (62)$$

Напряжённость гравитационного поля связана с потенциалом Φ соотношением $\vec{g} = -\nabla\Phi$. Подставляя это в предыдущее уравнение, приходим к уравнению Пуассона:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (63)$$

где $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа.

Другой вывод уравнения Пуассона см., например, в [10, § 5–6].

Приложение В. Вывод выражения для круговой скорости в осесимметричном потенциале $\Phi(R, z)$

Рассмотрим движение пробной массы m по круговой орбите радиуса R в плоскости диска ($z = 0$). При круговом движении центростремительное ускорение равно $a_c = v_c^2/R$, где v_c – круговая скорость. С другой стороны, гравитационное ускорение в радиальном направлении определяется градиентом потенциала: $a_g = -\partial\Phi/\partial R$.

Уравнение радиального равновесия (второй закон Ньютона в проекции на радиальное направление) имеет вид

$$m \frac{v_c^2}{R} = -m \frac{\partial\Phi}{\partial R}, \quad (64)$$

где знак минус в правой части возникает потому, что сила гравитации направлена в сторону уменьшения R . Сокращая массу m и учитывая, что для устойчивой круговой орбиты производная $\partial\Phi/\partial R$ должна быть положительной (потенциал обычно возрастает, то есть по модулю убывает, с ростом R), получаем

$$v_c^2(R) = R \left. \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right|_{z=0}. \quad (65)$$

Приложение С. Дополнительные задачи

Приведём условия ещё нескольких задач, предлагаемых для самостоятельного решения. Эти задания носят в основном технический характер, помогая оценивать характерные значения параметров движения и дополнительно тренироваться в применении операций высшей математики, например – во взятии производных.

Задача 1. Определите значение круговой скорости на расстоянии солнечного круга ($R_\odot = 8.0$ кпк)

в потенциале диска

$$\Phi(R, z) = -\frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}},$$

$$M_d = 7 \cdot 10^{10} M_\odot, \quad a = 3.7 \text{ кпк}, \quad b = 0.3 \text{ кпк}.$$

Задача 2. Потенциал модельной галактики зададим двумя компонентами – балджем и диском. Пусть потенциал балджа представлен моделью Пламмера

$$\Phi_b(r) = -\frac{GM_b}{\sqrt{r^2 + c^2}},$$

$$M_b = 3.9 \cdot 10^{10} M_\odot, \quad c = 0.3 \text{ кпк},$$

где r – галактоцентрическое расстояние. Потенциал диска имеет вид

$$\Phi_d(R, z) = -\frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}},$$

$$M_d = 1.1 \cdot 10^{11} M_\odot, \quad a = 6.5 \text{ кпк}, \quad b = 0.26 \text{ кпк}.$$

Постройте кривую вращения для экваториальной плоскости данной галактики в интервале галактоосевых расстояний от 1 кпк до 20 кпк с шагом не более 1 кпк. Не забудьте, что построение графика начинается с оформления таблицы значений.

Задача 3*. Определите постоянные Оорта

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} - \frac{dv_c}{dR} \right), \quad B = -\frac{1}{2} \left(\frac{v_c}{R} + \frac{dv_c}{dR} \right).$$

в модели, включающей только диск и балдж, для солнечной окрестности. Используйте потенциалы

$$\Phi_b(r) = -\frac{GM_b}{\sqrt{r^2 + c^2}},$$

$$\Phi_d(R, z) = -\frac{GM_d}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}};$$

$$M_b = 3.9 \cdot 10^{10} M_\odot, \quad M_d = 1.1 \cdot 10^{11} M_\odot,$$

$$c = 0.3 \text{ кпк}, \quad a = 6.5 \text{ кпк}, \quad b = 0.26 \text{ кпк}.$$

Астрономическое образование, 2026. Материал предоставлен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (с указанием авторства – с сохранением условий). Разрешено свободно делиться (обмениваться) – копировать и распространять материал на любом носителе и в любом формате в любых целях, включая коммерческие; адаптировать (создавать производные материалы) – делать ремиксы, видоизменять и создавать новое, опираясь на этот материал в любых целях, включая коммерческие; при условии обеспечения соответствующего указания авторства, предоставления ссылки на лицензию и обозначения изменений, если таковые были сделаны. Производные материалы должны распространяться на таких же условиях.