

Моделирование радиальных колебаний Солнца

А. О. Мохов*

Юношеская математическая школа, г. Санкт-Петербург



Астрономическое
образование

2026, № 2

Аннотация

В учебно-исследовательском проекте построена дискретная одномерная модель радиальных колебаний Солнца: радиальный сектор звезды разбивается на блоки, а давление газа между соседними блоками описывается нелинейными «газовыми пружинами». Частоты и формы свободных колебаний находятся как собственные значения и собственные векторы в матричной задаче. Для наиболее низкочастотной моды получен период около $4.3 \cdot 10^3$ с; наибольшие смещения в этой моде приходятся на наружные слои модели. Результаты модального анализа дополнительно проверены прямым интегрированием уравнений движения методом Leapfrog.

Исследовательский проект выполнен А. О. Моховым под научным руководством А. В. Веселовой в 2025/2026 учебном году.

Учебно-исследовательская деятельность

Ключевые слова:

Солнце, гелиосейсмология, численное моделирование, колебания, собственные моды, численное интегрирование

*aleksandr.o.mokhov@mail.ru

1. Введение

Солнце не является идеально стационарным объектом. Солнечные пятна, вспышки и другие проявления солнечной активности (включая аномалии, зафиксированные в геологической летописи Земли) показывают, что его состояние изменяется, причём часть процессов носит периодический характер.

Первые достоверные наблюдения солнечных колебаний были опубликованы в 1962 году: по доплеровским измерениям скорости были обнаружены квазипериодические колебания с периодами около 5 минут [1]. Впоследствии их интерпретировали как стоячие акустические волны [2]. В гелиосейсмологии солнечные колебательные моды различают по основной возвращающей силе: выделяют акустические p -моды, гравитационные g -моды и поверхностно-гравитационные f -моды.

В этой работе моделируются радиальные колебания Солнца. Можно предположить, что различные случайные факторы влияют на такой вид колебаний слабее всего, а сами колебания могут отражать значимые крупномасштабные процессы, происходящие на Солнце. Вместе с тем, сами колебания, как определённый вариант «перестройки» внутренней структуры Солнца, могут индуцировать иные периодические процессы.

Грубую оценку характерного периода колебаний можно получить, считая Солнце однородным шаром, колебания которого определяются гравитацией и давлением газа [3]. В такой модели круговая частота радиальных колебаний составляет¹ примерно $\omega \approx 6.28 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, что соответствует периоду колебаний порядка 10^4 с.

В литературе приводятся разные наблюдаемые периоды солнечных колебаний (от около 5 мин до 20–40 мин), а также амплитуды порядка 20 км [4]. В работах [5; 6] сообщалось о колебаниях с периодом 160 мин.

Цель работы — построить простую дискретную модель радиальных колебаний Солнца, определить периоды и формы её свободных мод, проверить численную сходимость и сопоставить модальный анализ с прямым интегрированием уравнений движения.

Поступило в редакцию	27.05.2026
После доработки	10.06.2026
В печать	26.06.2026
Опубликовано	12.08.2026

ISSN 3033-7917
journal.astroedu.ru

2. План исследования

Исследование включало следующие этапы:

1. построение расчётной модели на основе радиальных профилей стандартной модели Солнца;
2. формулировку упрощающих допущений и определение равновесного состояния;
3. вывод и линеаризацию уравнений движения;
4. программную реализацию матричной задачи на языке программирования C++ с использованием библиотеки Eigen [7];
5. проверку сходимости при увеличении числа расчётных блоков;
6. анализ периодов, энергетического критерия и форм мод;
7. прямое интегрирование нелинейных уравнений методом Leapfrog и сравнение результатов с результатами анализа мод.

3. Модель строения Солнца

Модель Солнца охватывает область от центра до верхней границы конвективной зоны, которая принимается за условную поверхность. Схема строения и основные характеристики Солнца приведены на рис. 1 и в табл. 1.

Сидерический период вращения наружных слоёв составляет около 25 сут. на экваторе и 30 сут. вблизи полюсов. Внутренние профили температуры, давления, плотности и скорости звука показаны на рис. 2.

Для оценки давления излучения использованы табличные данные о непрозрачности (рис. 3).

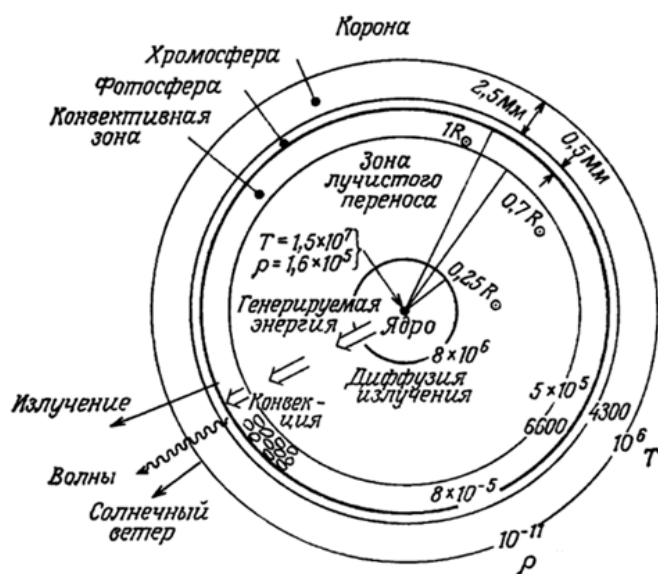


Рис. 1. Внутреннее строение Солнца; температура указана в кельвинах, плотность — в $\text{кг}/\text{м}^3$ [8]

Таблица 1. Основные характеристики Солнца [9]

Величина	Значение
Масса $M_{\odot}$	$1.99 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Радиус $R_{\odot}$	$6.96 \cdot 10^8 \text{ м}$
Средняя плотность	$1.41 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$
Ускорение свободного падения на поверхности	$274 \text{ м}/\text{с}^2$
Светимость	$3.8 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$

Допущения В дальнейших расчётах приняты следующие допущения:

- вещество Солнца считается идеальным газом;
- рассматриваются только радиальные колебания;
- колебания считаются изотермическими (температура каждого блока постоянна);
- вращением Солнца пренебрегаем;
- в пределах каждого блока ускорение свободного падения и давление излучения считаются постоянными;
- колебания считаются малыми, что позволяет линеаризовать уравнения движения.

4. Равновесное состояние

Из Солнца мысленно выделяется узкий радиальный сектор с телесным углом 1 ср, который разбивается на N блоков равной высоты (рис. 4). Масса каждого блока определяется по радиальному профилю плотности. Давление между соседними блоками представляется действием «газовой пружины».

Для идеального газа

$$PV = \nu RT. \quad (1)$$

Если объём слоя равен $V = Sl$, то сила газового давления

$$F = PS = \frac{\nu RT}{l} = \frac{k}{l}, \quad (2)$$

где l — высота блока, S — площадь его границы, а $k = \nu RT$ — параметр «газовой пружины».

Для i -го блока введём

$$F_{c,i} = m_i g_i - F_{\text{rad},i}, \quad (3)$$

где $m_i g_i$ — сила тяжести, а $F_{\text{rad},i}$ — сила давления излучения. Для каждого блока эти величины считаются постоянными.

Тогда уравнение движения имеет вид

$$m_i \ddot{x}_i = \frac{k_i}{l_i} - \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} - F_{c,i}. \quad (4)$$

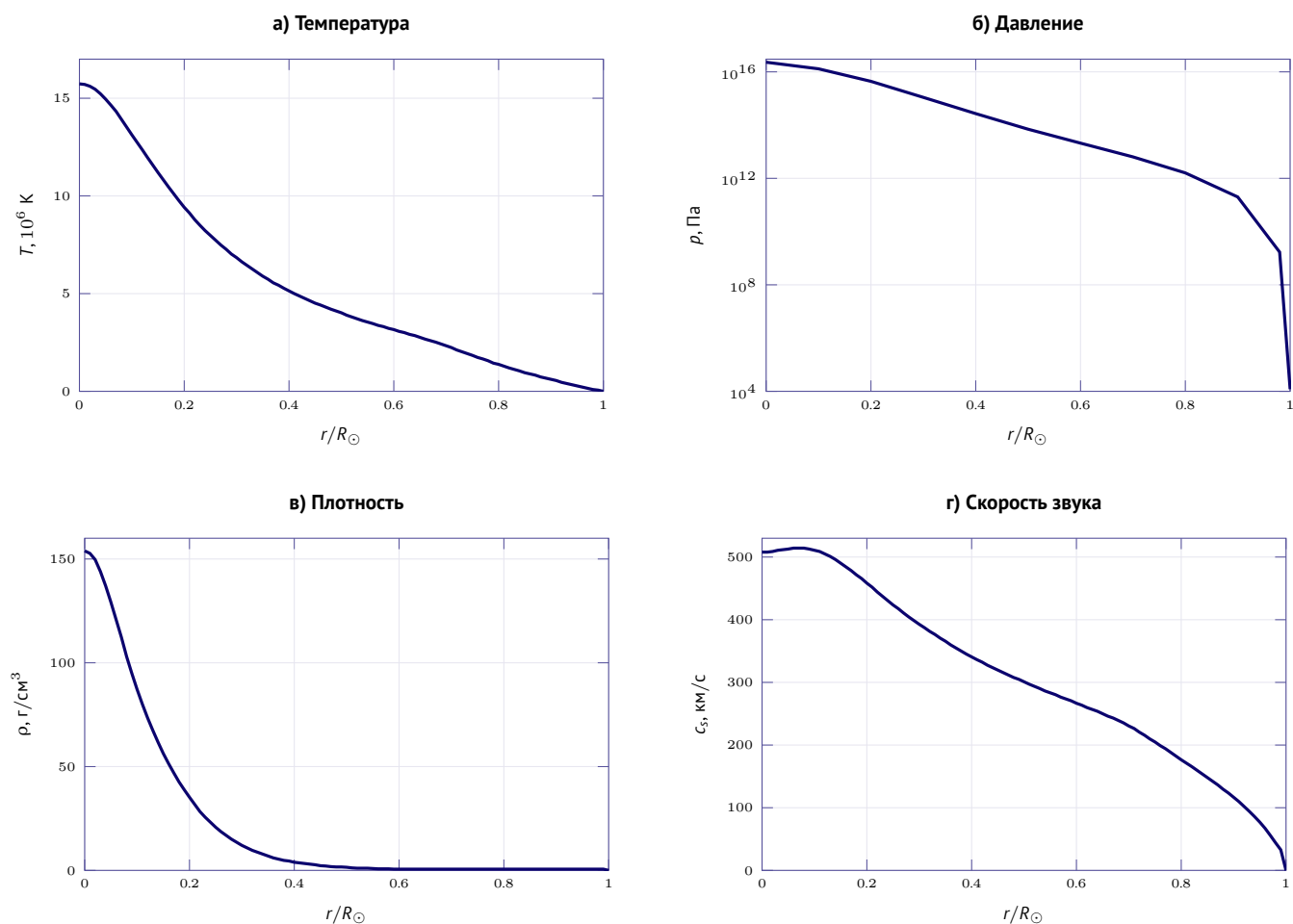


Рис. 2. Радиальные профили параметров модели Солнца: температура, плотность и скорость звука по [10], давление по [9]. Горизонтальная координата нормирована на радиус Солнца

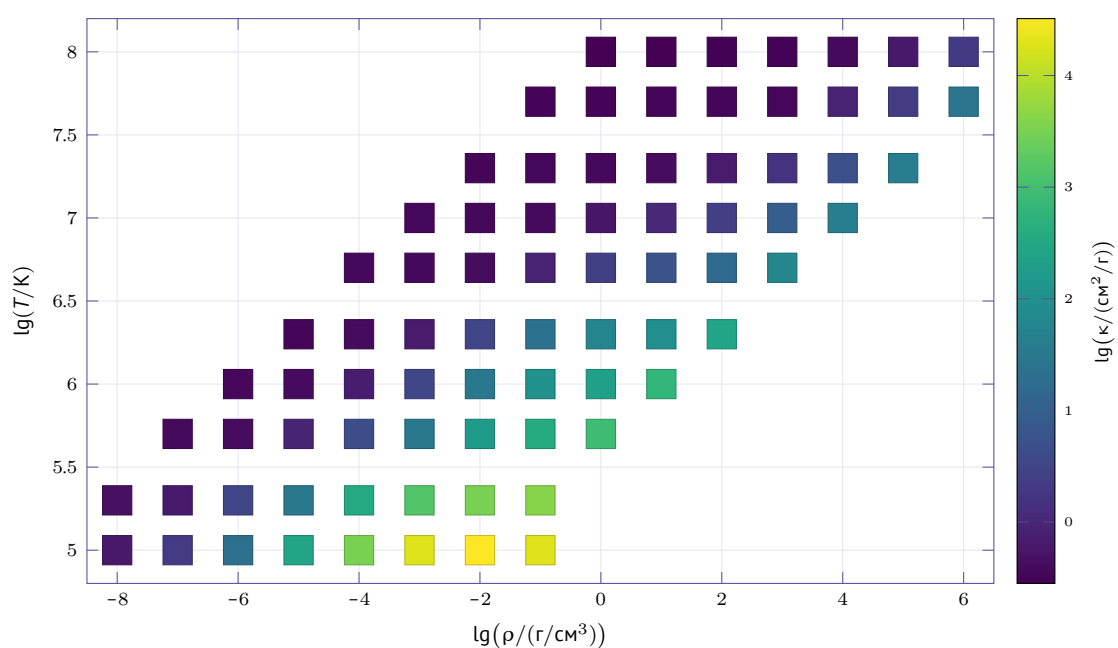


Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма коэффициента непрозрачности от температуры и плотности (значение показано цветом) согласно [11]

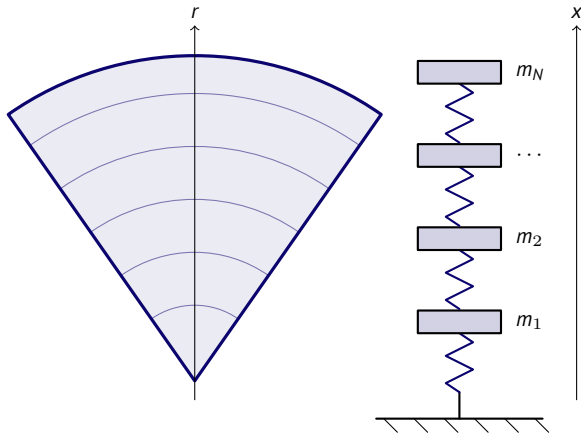


Рис. 4. Дискретизация радиального сектора Солнца и эквивалентная цепочка блоков, связанных «газовыми пружинами»

Для верхнего блока второе слагаемое принимается равным нулю. Параметры k_i находятся последовательно сверху вниз из условия $\ddot{x}_i = 0$, то есть из равновесия каждого блока.

5. Свободные колебания

5.1. Линеаризация и матричная задача

При малом отклонении длины пружины от равновесного значения l_{i0} выражение (2) линеаризуется следующим образом:

$$\frac{k_i}{l_i} \approx -\frac{k_i}{l_{i0}^2} l_i + \frac{2k_i}{l_{i0}}. \quad (5)$$

Обозначим эффективную жёсткость

$$c_i = \frac{k_i}{l_{i0}^2}. \quad (6)$$

Если $q_i = x_i - x_{i0}$ — смещение i -го блока относительно равновесия, то после вычитания уравнения равновесия получаем

$$m_i \ddot{q}_i + (c_i + c_{i+1})q_i - c_i q_{i-1} - c_{i+1} q_{i+1} = 0. \quad (7)$$

Система (7) для $i = 1, \dots, N$ записывается в матрично-векторном виде как

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \mathbf{q} = 0 \quad (8)$$

Подстановка $\mathbf{q} = \boldsymbol{\varphi} \exp(i\omega t)$ сводит задачу к обобщённой задаче поиска собственных значений:

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} = \omega^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}. \quad (9)$$

Для ранжирования мод введён энергетический критерий

$$E_i = \sum_{j=1}^N m_j \varphi_{ij}^2, \quad (10)$$

где φ_{ij} — j -я компонента нормированной формы i -й моды. При заданной максимальной амплитуде $A_{\max}$ оценка максимальной кинетической энергии имеет вид

$$E_{\text{кин, max}} = \frac{E_i}{2} \omega_i^2 A_{\max}^2. \quad (11)$$

5.2. Проверка сходимости

Для оценки влияния дискретизации расчёты проведены при числе блоков от 500 до 20 000. Периоды четырёх наиболее низкочастотных мод приведены в табл. 2.

Таблица 2. Периоды четырёх наиболее низкочастотных мод, с

N	T_4	T_3	T_2	T_1
500	1717.418	2172.589	2834.207	4344.510
5 000	1716.842	2171.860	2833.465	4343.949
10 000	1716.818	2171.824	2833.426	4343.918
15 000	1716.810	2171.812	2833.413	4343.907
20 000	1716.806	2171.806	2833.406	4343.902

Относительное отличие от расчёта при $N = 20\,000$ определялось как

$$\varepsilon_N = \left| \frac{T_N - T_{20\,000}}{T_{20\,000}} \right|. \quad (12)$$

Результат показан на рис. 5.

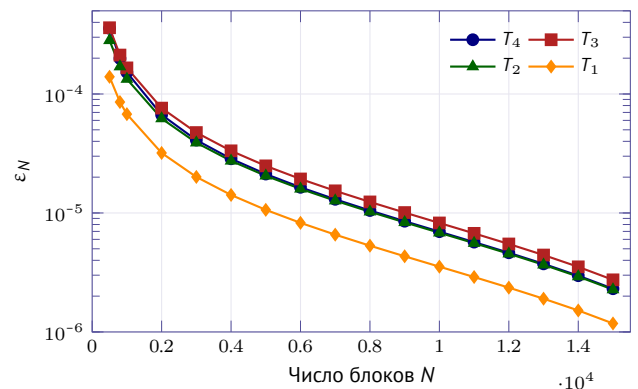


Рис. 5. Относительное отличие периодов от результатов расчёта при $N = 20\,000$; график построен по исходным данным автора.

Для наиболее низкочастотной моды переход от 10 000 к 20 000 блокам изменяет период менее чем на 0.001 %. Дальнейший анализ выполнен по расчёту с 10 000 блоками.

5.3. Периоды, энергетический критерий и формы мод

На рис. 6 приведены периоды и энергетические критерии найденных мод. Многочисленные точки с периодами, близкими к нулю, не демонстрируют сходимости при увеличении числа блоков и интерпретируются как артефакты дискретизации.

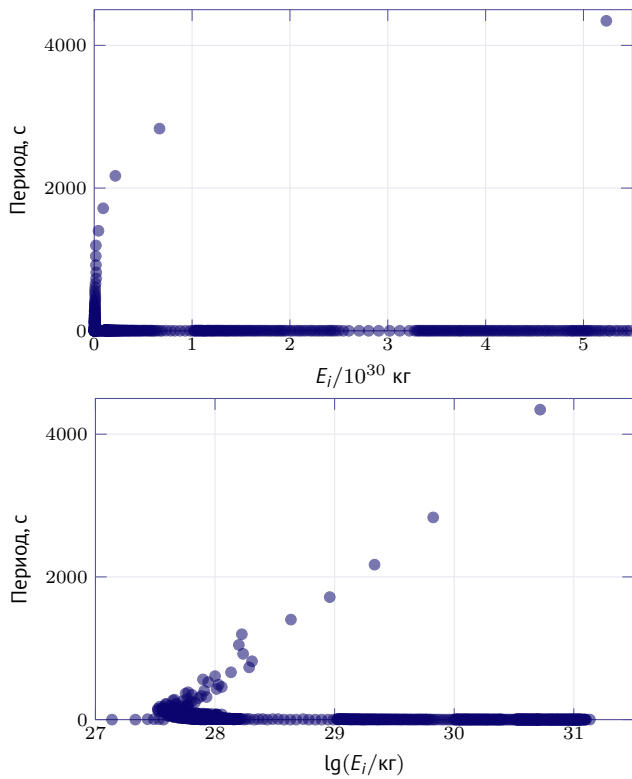


Рис. 6. Энергетические критерии и периоды мод расчётной системы

Наиболее заметный вклад в картину колебаний дают моды с периодами около 4 300, 2 800, 2 200, 1 700 и 1 400 секунд. Формы нескольких мод показаны на рис. 7. Во всех представленных низкочастотных модах нормированная амплитуда возрастает к наружным слоям модели.

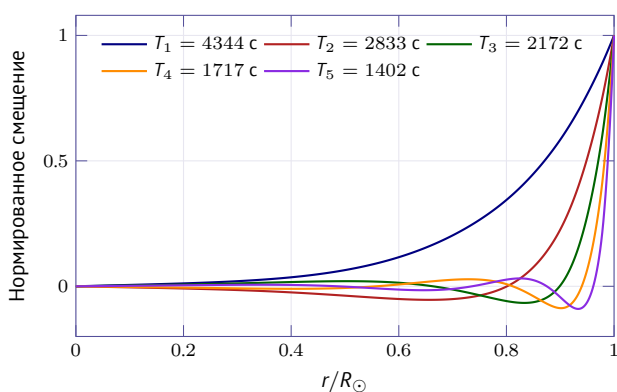


Рис. 7. Нормированные формы нескольких мод в зависимости от расстояния до центра Солнца

Для наиболее низкочастотной моды расчёт даёт $E_i \approx 5.23 \cdot 10^{30}$ кг. При $A_{\max} \approx 20$ км из (11) получается $E_{\text{кин, max}} \approx 2.05 \cdot 10^{33}$ Дж для сектора с телесным углом 1 ср. Умножение на 4π даёт оценку энергии колебания для всего Солнца $\approx 2.6 \cdot 10^{34}$ Дж.

6. Непосредственное численное интегрирование

Для независимой проверки модального анализа исходная нелинейная система (4) интегрировалась методом Leapfrog. Этот симплектический метод хорошо сохраняет энергию консервативной системы на больших временах [12]. На одном временном шаге сначала вычисляются скорости в середине интервала, затем новые координаты, длины пружин и ускорения, после чего обновляются скорости в конце шага.

Проведены две серии расчётов:

1. начальные смещения задавались так, что все равновесные координаты умножались на близкий к единице коэффициент k , то есть $x_i(0) = kx_{i0}$;
2. начальные смещения задавались пропорционально форме выбранной низкочастотной моды.

6.1. Однородное растяжение модели

Использованы $N = 100$ блоков, шаг $\Delta t = 0.01$ с, общее время 10^5 с, интервал записи 100 с.

Выбран коэффициент растяжения $k = 1 + 2 \cdot 10^{-5}$. Верхний блок при этом смещался примерно на 14 км, что близко к $A_{\max}$.

Временные ряды на рис. 8 имеют характерный период около 4 000 с, близкий к результату модального анализа для 100 блоков. В то же время колебание не является одномодовым: в нём, вероятно, присутствует суперпозиция нескольких собственных мод.

6.2. Начальное смещение по форме моды

Во второй серии использованы $N = 100$ блоков, шаг $\Delta t = 0.01$ с, низшая по частоте мода и максимальная начальная амплитуда 10 км. Ожидаемый период составлял $4.35 \cdot 10^3$ с.

На рис. 9 доминирует колебание с таким периодом, полученным при модальном анализе, хотя также заметен вклад других частот. Отклонение от чисто гармонического движения может быть связано с нелинейной зависимостью силы газового давления от длины «пружины».

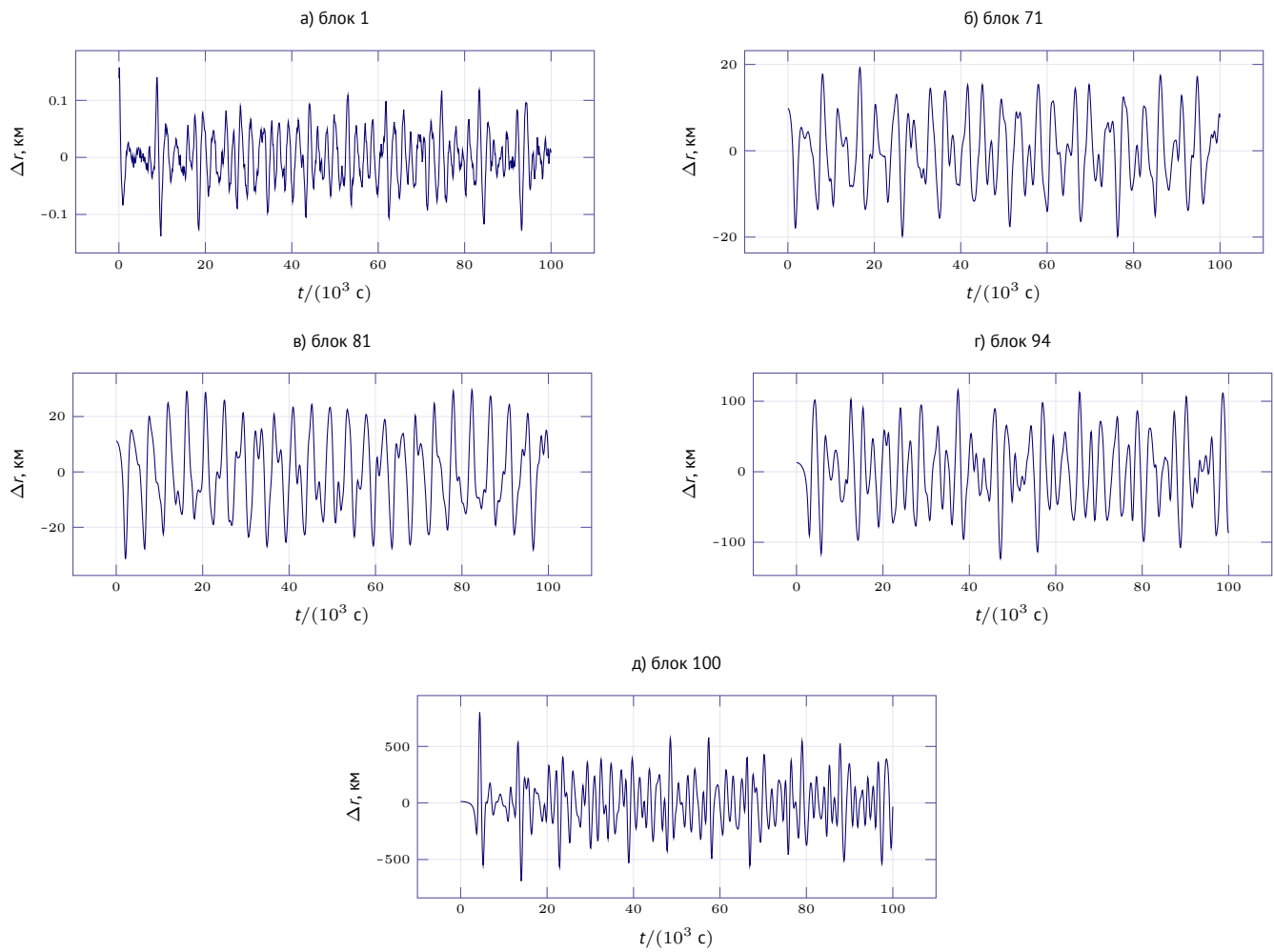


Рис. 8. Смещения выбранных блоков при однородном начальном растяжении расчётной модели

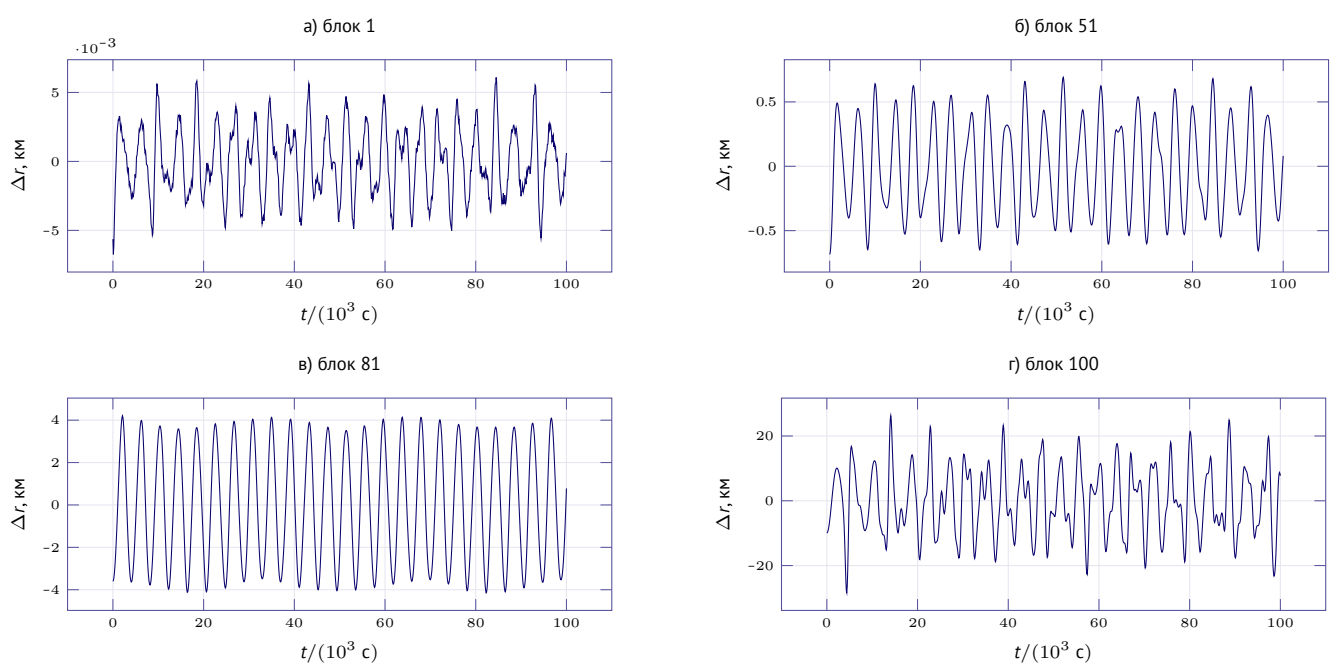


Рис. 9. Смещения выбранных блоков при начальном отклонении, пропорциональном форме низкочастотной моды

7. Обсуждение результатов

Реализованная дискретная модель воспроизводит несколько качественно ожидаемых свойств радиальных колебаний:

- наиболее низкочастотная мода имеет период, порядок которого совпадает с ожидаемым;
- смещения блоков в низкочастотных модах возрастают к наружным слоям.

Полученный период сопоставим с обсуждаемыми в литературе глобальными p -модами [13]. По сравнению с оценкой для однородного шара $\sim 10^4$ с [3] ниспадающий радиальный профиль плотности уменьшает период примерно вдвое.

Вместе с тем модель является «учебной». Она одномерна, не учитывает перенос энергии при возмущении, реалистичные граничные условия. Полученный результат ни в коем случае не претендует на воспроизведение наблюдаемого солнечного спектра.

8. Заключение

Построена дискретная модель радиальных колебаний Солнца и выполнен её модальный анализ. Наиболее низкочастотная мода модели имеет период около 70 мин; её амплитуда максимальна во внешних слоях светила. Проверка при разном числе блоков показала сходимость низкочастотной части спектра, а прямое интегрирование методом Leapfrog подтвердило результаты модального анализа.

Разработанную модель можно попробовать применить для исследования радиальных колебаний других звёзд (для этого потребуется модифицировать лишь несколько функций и глобальных переменных программы).

Благодарности. Автор благодарит А. В. Веселову за научное руководство.

Примечания

1 Подробные расчёты и исходный код приведены в [14].

Список литературы

- [1] Leighton R. B., Noyes R. W., Simon G. W. Velocity Fields in the Solar Atmosphere. I. Preliminary Report // The Astrophysical Journal. 1962. Т. 135. С. 474–499. DOI: 10.1086/147285.
- [2] Alexeev B. V. To the Nonlocal Theory of Variable Stars // Nonlocal Astrophysics: Dark Matter, Dark Energy and Physical Vacuum. Amsterdam : Elsevier, 2017. Гл. 7. ISBN 978-0-444-64019-2.
- [3] Иванов В. В. Физика звёзд. Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет, 2018. URL: http://www.astro.spbu.ru/sites/default/files/BOOK_1.pdf.
- [4] Жуежда Ю. Д. Колебания и волны на Солнце / под ред. Р. А. Сюняева. 1986. URL: <https://www.astronet.ru/db/msg/1188371> ; Глоссарий Astronet.ru.
- [5] Observations of Solar Oscillations with Periods of 160 Minutes / P. H. Scherrer [и др.] // Nature. 1979. Т. 277. С. 635–637. DOI: 10.1038/277635a0.
- [6] The Search for Solar Oscillations, 1974 to 1976 / J. R. Brookes [и др.] // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1978. Т. 184, № 4. С. 759–767. DOI: 10.1093/mnras/184.4.759.
- [7] Eigen contributors. Eigen 3.4 Documentation. URL: <https://eigen.tuxfamily.org/dox/>.
- [8] Пруст Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика / пер. с англ. Москва : Мир, 1985. 592 с.
- [9] Кононович Э. В., Мороз В. И. Общий курс астрономии / под ред. В. В. Иванова. 8-е изд., испр. Москва : ЛЕНАНД, 2025. ISBN 978-5-9710-6081-9.
- [10] Kosovichev A. G. Internal Structure. II : PHYS 780: Solar and Solar-Terrestrial Physics. URL: http://sun.stanford.edu/~sasha/PHYS780/SOLAR_PHYSICS/ ; Распоряжением Минюста России от 07.04.2026 № 449-р Стэнфордский университет включён в перечень иностранных и международных организаций, деятельность которых признана нежелательной на территории Российской Федерации. Подробнее на сайте <https://minjust.gov.ru>.
- [11] Аллен К. У. Астрофизические величины. Москва : Мир, 1977.
- [12] Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. 2-е изд. Berlin : Springer, 2006. DOI: 10.1007/3-540-30666-8.
- [13] Lopes I. Search for Global f-Modes and p-Modes in the ^8B Neutrino Flux // The Astrophysical Journal Letters. 2013. Т. 777. DOI: 10.1088/2041-8205/777/1/L7. arXiv: 1310.3467.
- [14] Мохов А. О. Исследование радиальных колебаний Солнца. 2026. URL: <https://drive.google.com/file/d/18FZGM2Gg8Ct6G0Eh1eWU4E0xtVB5Rf5u/view> ; отчёт и исходный код.

Астрономическое образование, 2026. Материал предоставлен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (С указанием авторства — С сохранением условий). Разрешено свободно делиться (обмениваться) — копировать и распространять материал на любом носителе и в любом формате в любых целях, включая коммерческие; адаптировать (создавать производные материалы) — делать ремиксы, видоизменять и создавать новое, опираясь на этот материал в любых целях, включая коммерческие; при условии обеспечения соответствующего указания авторства, предоставления ссылки на лицензию и обозначения изменений, если таковые были сделаны. Производные материалы должны распространяться на таких же условиях.