

Двуликий Янус. О движении Януса и Эпиметея

Н. Е. Кондратьев^{*1,2}

¹Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга

²Институт астрономии РАН



Астрономическое
образование

2026, № 2

Аннотация

Решение олимпиадной задачи часто строится вокруг одной или нескольких ключевых идей, без которых дальнейшие вычисления невозможны. В статье разобрана задача 11.6 заключительного этапа Всероссийской олимпиады школьников по астрономии 2026 года о движении спутников Сатурна Януса и Эпиметея. Представлены несколько способов оценки больших полуосей и периодов обращения спутников, а также минимального расстояния между ними: разложение по малому параметру, бинарный поиск, прямое интегрирование сил и применение законов сохранения в инерциальной и неинерциальной системах отсчёта. Показано, какие приближения позволяют считать орбиты почти совпадающими и почему при оценке сближения нельзя пренебрегать влиянием Сатурна. Сопоставление решений демонстрирует роль проверки порядков величин и области применимости выбранной физической модели.

Астрономические этюды

Ключевые слова:

олимпиадные задачи, небесная механика, соорбитальные спутники, законы сохранения, приближённые вычисления

Сокращения:

ВсОШ — Всероссийская олимпиада школьников; ЗСЭ — закон сохранения энергии; ЗСМИ — закон сохранения момента импульса; ИСО — инерциальная система отсчёта; НИСО — неинерциальная система отсчёта; IOAA — International Olympiad on Astronomy and Astrophysics

В статье рассматривается задача 11.6 заключительного этапа ВсОШ по астрономии 2026 года [1].

*rjkz2792009@rambler.ru

1. Условие задачи

Вокруг Сатурна по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости, обращаются два спутника — Янус и Эпиметей. Расстояние между орбитами этих спутников составляет всего около 50 км. Раз в 4 года вследствие взаимного гравитационного взаимодействия спутники меняются орбитами: внутренний становится внешним, а внешний — внутренним.

А. Оцените большие полуоси орбит и периоды обращения спутников.

В. Оцените минимально возможное расстояние $l_{\min}$ между спутниками.

Массы Сатурна, Януса и Эпиметея равны $5.7 \cdot 10^{26}$ кг, $1.9 \cdot 10^{18}$ кг и $5.3 \cdot 10^{17}$ кг соответственно. Можно считать, что во время взаимодействия орбиты обоих спутников остаются круговыми.

2. Характеристики орбит спутников

Ключевые идеи. Заметим, что 50 км — это *очень* мало. Большие полуоси орбит спутников не могут быть меньше радиуса Сатурна, равного $6 \cdot 10^4$ км. Эта величина значительно больше 50 км, поэтому параметры орбит спутников различаются очень мало. При определении больших полуосей и периодов обращения различием орбит с учётом точности вычислений можно пренебречь.

Можно заметить, что каждые 4 года спутники меняются орбитами, то есть каждые 4 года они подходят близко друг к другу. Это значит, что синодический период спутников примерно равен 4 годам, причём спутники движутся в одну и ту же сторону. Почему они не могут двигаться в противоположных направлениях? При движении навстречу друг другу спутники неизбежно столкнутся, так как их размеры заведомо больше расстояния между их орбитами (подробнее см. в разд. 3).

Поступило в редакцию	19.06.2026
После доработки	17.07.2026
В печать	24.07.2026
Опубликовано	12.08.2026

ISSN 3033-7917
journal.astroedu.ru

2.1. Операции с малыми числами

Пусть период обращения и большая полуось орбиты одного спутника равны T и a , а второго – $(T + \Delta T)$ и $(a + \Delta a)$ соответственно. По условию $\Delta a = 50$ км.

Из третьего закона Кеплера

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM_S}, \quad (1)$$

$$\frac{(T + \Delta T)^2}{4\pi^2} = \frac{(a + \Delta a)^3}{GM_S}, \quad (2)$$

где M_S – масса Сатурна.

Воспользуемся малостью Δa и ΔT и применим формулу приближённых вычислений $(1 + x)^n \approx 1 + nx$:

$$\begin{aligned} \frac{T^2 \left(1 + 2\frac{\Delta T}{T}\right)}{4\pi^2} &= \frac{a^3 \left(1 + 3\frac{\Delta a}{a}\right)}{GM_S}, \\ 2 \cdot \frac{\Delta T}{T} &= 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}. \end{aligned} \quad (3)$$

Свяжем синодический период с сидерическими периодами спутников. Воспользуемся той же формулой для малого x при $n = -1$:

$$\frac{1}{T_{\text{син}}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T + \Delta T} \approx \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2}. \quad (4)$$

Теперь можно выразить a через Δa и $T_{\text{син}}$:

$$\begin{aligned} T_{\text{син}} &= T \cdot \frac{T}{\Delta T} = T \cdot \frac{2a}{3\Delta a} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_S}} \cdot \frac{2a}{3\Delta a}, \\ a^5 &= \frac{9}{4} \cdot GM_S \cdot (\Delta a)^2 \cdot \left(\frac{T_{\text{син}}}{2\pi}\right)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

После подстановки получаем величину большой полуоси $a \approx 154$ тыс. км, что соответствует сидерическому периоду

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_S}} = 0.7 \text{ сут.} \quad (6)$$

2.2. Подбор и метод бинарного поиска

Можно также заметить, что при увеличении большой полуоси орбит спутников и сохранении разности радиусов в 50 км сидерический и синодический периоды монотонно растут. Тогда искомую большую полуось можно найти методом бинарного поиска (рис. 1): сначала подберём два значения, при которых синодический период соответственно меньше и больше 4 земных лет, а затем будем уточнять результат делением отрезка пополам.

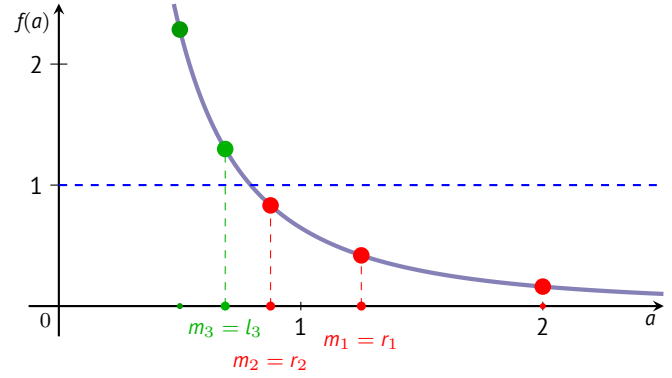


Рис. 1. Применение метода бинарного поиска для решения уравнения $f(a) = 1$, $f(a)$ – строго монотонно убывающая на рассматриваемом отрезке функция. На первых двух итерациях меняется правая граница отрезка, на третьей – левая

В качестве начальных граничных значений можно использовать радиус Сатурна (радиусы орбит спутников не могут быть меньше него) и радиус сферы Хилла Сатурна (на больших расстояниях спутники не были бы гравитационно связаны с Сатурном). Можно выбрать и физически нереалистичные малую и большую границы: они нужны только для начала поиска, если искомое значение заведомо лежит между ними.

Синодический период по известным большим полуосям можно найти, подставив (1) и (2) в (4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_{\text{син}}} &= \frac{1}{T} - \frac{1}{T + \Delta T} = \\ &= \frac{\sqrt{GM_S}}{2\pi} \left(\frac{1}{a^{3/2}} - \frac{1}{(a + \Delta a)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Получаем приведённую в табл. 1 последовательность приближений, сходящуюся к уже известному ответу.

Таблица 1. Пример последовательности значений больших полуосей орбит, приближающихся к искомому значению методом бинарного поиска

a , тыс. км	$T_{\text{син}}$, лет
60	0.38
1000	431
530	88
295	20
177.5	5.7
118.8	2.1
148.1	3.6
162.8	4.6
155.5	4.1

Этот метод чувствителен к ошибкам округления: при $\Delta a/a \lesssim 10^{-12}$ точности обычного инженерного калькулятора заведомо не хватило бы, чтобы по формуле (7) получить $1/T_{\text{син}} \neq 0$.

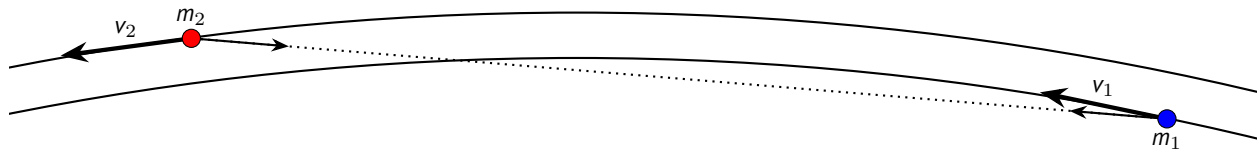


Рис. 2. Гравитационное взаимодействие спутников, движущихся по близким орбитам. Силы взаимного притяжения спутников практически параллельны скоростям, поэтому составляющей силы, перпендикулярной скорости, можно пренебречь

3. Сближение спутников и обмен орбитами

Ключевые идеи. Снова заметим, что 50 км — это очень мало. Оценим характерный линейный размер каждого спутника по его массе, приняв плотность равной 1000 кг/м^3 :

$$\sqrt[3]{\frac{10^{18} \text{ кг}}{1000 \text{ кг/м}^3}} \sim 10^2 \text{ км.} \quad (8)$$

Спутники не могут регулярно сближаться на расстояние, сравнимое с их размерами: даже небольшие возмущения орбит в таком случае могли бы привести к столкновению. Таким образом, $\Delta a \ll l_{\min}$, и мы снова можем считать, что тела движутся практически по одной орбите. Более того, тела можно считать точечными, то есть пренебречь их размерами и формой.

С другой стороны, массы самих спутников невелики, и существенное изменение больших полуосей их орбит происходит только во время сближения. Будем считать, что за пределами некоторого $l_{\max} \ll a$ Янус и Эпиметей не взаимодействуют друг с другом. Поскольку взаимодействие существенно лишь на участке длиной порядка $l_{\max} \ll a$, кривизной орбиты на этом участке можно пренебречь.

Следовательно, большие полуоси орбит изменяются только за счёт изменения модуля скоростей спутников, но не их направления. Так как орбиты считаются круговыми, в каждый момент времени скорости остаются направленными перпендикулярно направлению на Сатурн. Кроме того, сохранение круговой формы орбит означает, что взаимодействие между спутниками длится несколько сотен сидерических периодов. Поэтому влиянием Сатурна пренебрегать нельзя.

Это также объясняет, почему спутники должны вращаться в одном направлении. При движении в противоположных направлениях взаимодействие происходит на масштабах времени, существенно меньших одного сидерического периода, поэтому сохранение круговой формы орбит невозможно.

На рис. 2 показаны направления скоростей и сил взаимного притяжения спутников.

3.1. Непосредственное интегрирование

Это наиболее прямой способ, требующий понимания механизма взаимодействия спутников.

Используется известный факт: увеличение полной энергии тела на круговой орбите переводит его на более высокую круговую орбиту, где орбитальная скорость меньше, и наоборот. Действительно, для круговой орбиты $E_{\text{пот}} = -2E_{\text{кин}}$ (на бесконечности $E_{\text{пот}} = 0$), а потому полная энергия $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = -E_{\text{кин}}$. Тогда увеличение полной энергии приводит к уменьшению кинетической энергии: $dE = -dE_{\text{кин}}$.

Изменение энергии равно работе сил гравитационного притяжения между двумя телами. Тогда

$$dE = F \cdot dl \cdot \cos \Delta\theta = F \cdot v dt \cdot \cos \Delta\theta = -d\left(\frac{m}{2}v^2\right) = -mv dv, \quad (9)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{F}{m} \cdot \cos \Delta\theta. \quad (10)$$

Здесь $\Delta\theta$ — угол между скоростью тела и направлением силы притяжения к другому спутнику. В случае совпадающих орбит по теореме об угле между касательной и хордой он равен половине угла $\Delta\varphi$ между направлениями из центра Сатурна на два рассматриваемых спутника.

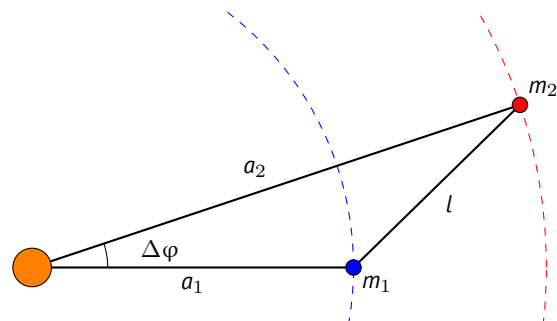


Рис. 3. Определение расстояния между спутниками.

Тот же результат можно получить, рассматривая изменение кинетической энергии с учётом работы силы притяжения Сатурна.

Пусть текущие координаты спутников в полярной системе координат равны (a_1, φ_1) и (a_2, φ_2) соответ-

ственно. Будем считать, что $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ мал. Тогда по теореме косинусов расстояние между спутниками равно

$$l = \sqrt{(a_2 \cos \Delta\varphi - a_1)^2 + (a_2 \sin \Delta\varphi)^2} \approx \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (a_2 \Delta\varphi)^2}. \quad (11)$$

При этом $(a_2 - a_1) \leq \Delta a \ll l_{\min}$, из чего следует, что

$$l \approx a \Delta\varphi. \quad (12)$$

Пусть линейная скорость, угловая скорость и масса одного из спутников равны v_1 , ω_1 и m_1 , линейная скорость и масса другого – v_2 , ω_2 и m_2 соответственно. Расстояние между спутниками – l . В начальный момент времени большие полуоси орбит спутников равны $a_{10} = a$ и $a_{20} = a + \Delta a$ соответственно, при этом $\omega_{10} > \omega_{20}$, то есть первый спутник догоняет второй.

Под действием гравитационных сил скорости тел изменяются:

$$\frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{m_1} \cdot \frac{Gm_1m_2}{l^2}, \quad (13)$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{m_2} \cdot \left(-\frac{Gm_1m_2}{l^2} \right), \quad (14)$$

$$\frac{dl}{dt} = a \frac{d\Delta\varphi}{dt} = a(-\omega_1 + \omega_2). \quad (15)$$

Формулы (13)–(14) получены из (10) подстановкой $\cos \Delta\theta = 1$, так как мы считаем $\Delta\theta = \frac{\Delta\varphi}{2}$ малым. Формула (15) получена дифференцированием (12) по времени.

Свяжем разности линейных и угловых скоростей с разностью больших полуосей орбит. Положим $a_1 = a + \Delta a_1$, $a_2 = a + \Delta a_2$ и обозначим $a_2 - a_1 = \Delta a_2 - \Delta a_1$ через δa . Тогда

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \sqrt{\frac{GM_S}{a_1}} - \sqrt{\frac{GM_S}{a_2}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{GM_S}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM_S}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_2}{a} \right)} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{GM_S}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_1}{2a} - 1 + \frac{\Delta a_2}{2a} \right)} = v_{10} \cdot \frac{\delta a}{2a}; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 - \omega_2 &= \sqrt{\frac{GM_S}{a_1^3}} - \sqrt{\frac{GM_S}{a_2^3}} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{GM_S}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_1}{a} \right)} - \sqrt{\frac{GM_S}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_2}{a} \right)} \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{GM_S}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_1}{2a} - 1 + \frac{3\Delta a_2}{2a} \right)} = \omega_{10} \cdot \frac{3\delta a}{2a}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда получим, что

$$\frac{dl}{dt} = -a\omega_{10} \cdot \frac{3\delta a}{2a} = \frac{3}{2}v_{10} \cdot 2 \frac{v_2 - v_1}{v_{10}} = 3(v_2 - v_1). \quad (18)$$

Обозначим $v_2 - v_1$ через δv , тогда

$$\frac{d\delta v}{dt} = \frac{G(m_1 + m_2)}{l^2}, \quad (19)$$

$$\frac{dl}{dt} = 3\delta v. \quad (20)$$

Перемножим эти два уравнения и получим

$$\begin{aligned} 3\delta v \cdot \frac{d\delta v}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{3(\delta v)^2}{2} \right) = \\ &= \frac{G(m_1 + m_2)}{l^2} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{G(m_1 + m_2)}{l} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

то есть следующий закон сохранения:

$$3(\delta v)^2 + \frac{2G(m_1 + m_2)}{l} = \text{const}. \quad (22)$$

Записывая его для двух состояний – при $l \rightarrow \infty$ (без взаимодействия) и при $\delta v = 0$, – получим

$$\frac{2G(m_1 + m_2)}{l_{\min}} = 3(\delta v_{\infty})^2, \quad (23)$$

где $\delta v_{\infty} = v_{20} - v_{10}$, то есть

$$|\delta v_{\infty}| = v_{10} \cdot \frac{\Delta a}{2a} = \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{\Delta a}{2a} = \pi \cdot \frac{\Delta a}{T}. \quad (24)$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} l_{\min} &= \frac{2G(m_1 + m_2)}{3(\delta v_{\infty})^2} = \\ &= \boxed{\frac{2G(m_1 + m_2)T^2}{3\pi^2(\Delta a)^2}} = 15.8 \text{ тыс. км.} \end{aligned} \quad (25)$$

Спутники не «обмениваются» орбитами в буквальном смысле: более массивный спутник перемещается на меньшее расстояние, чем менее массивный. Однако после окончания взаимодействия расстояние между орбитами оказывается таким же, каким было до взаимодействия (рис. 4). Последний обмен орбитами произошёл в начале 2026 года, при этом Янус из «внутреннего» спутника снова стал «внешним».

3.2. ЗСЭ в НИСО

В данном способе решения не требуется подробно разбирать движение спутников относительно друг друга, однако необходимо знать формулы разложения до второго порядка малости.

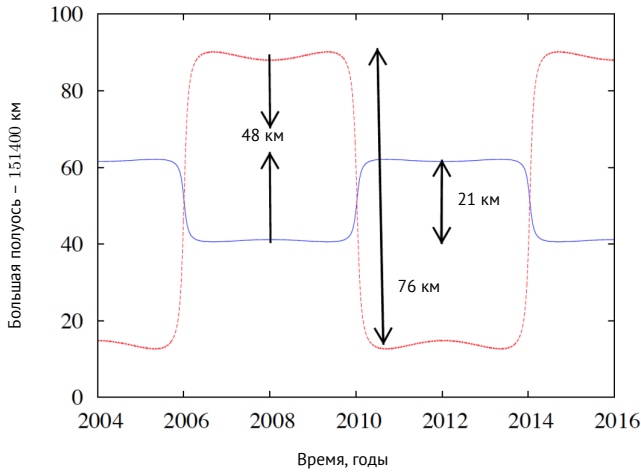


Рис. 4. Изменение больших полуосей спутников со временем [2]. Синяя кривая соответствует Янусу, красная — Эпиметею. Янус изменяет свою большую полуось на 21 км, а Эпиметей — на 76 км. Средняя по времени большая полуось орбиты спутников равна 151 451.6 км

Определим, какие законы сохранения действуют в системе, образованной двумя спутниками, движущимися в центральном гравитационном поле Сатурна. Из-за взаимодействия с Сатурном суммарный импульс спутников не сохраняется. Зато сохраняются суммарная энергия с учётом гравитационной энергии в поле Сатурна, поскольку отсутствуют диссипативные силы, и суммарный момент импульса относительно центра Сатурна, поскольку гравитационные силы являются либо центральными (притяжение спутников к Сатурну), либо внутренними (притяжение спутников друг к другу).

Рассмотрим систему отсчёта, вращающуюся вокруг центра Сатурна с постоянной угловой скоростью ω , соответствующей угловой скорости движения по некоторой круговой орбите радиуса R :

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM_S}{R^3}. \quad (26)$$

Пусть спутник $i \in \{1, 2\}$ массой m_i находится в данный момент на расстоянии r_i от центра Сатурна, при этом будем считать, что $r_i - R \equiv x_i \ll R$. Пусть спутник с номером 1 изначально был внутренним, то есть $x_{10} < x_{20}$.

Линейная скорость спутника во вращающейся системе отсчёта равна

$$\begin{aligned} u_i &= \sqrt{\frac{GM_S}{r_i}} - \omega r_i = \sqrt{\frac{GM_S}{R + x_i}} - \omega(R + x_i) \approx \\ &\approx \sqrt{\frac{GM_S}{R^3}} \cdot R \left(1 - \frac{x_i}{2R}\right) - \omega(R + x_i) = -\frac{3}{2}\omega x_i. \end{aligned} \quad (27)$$

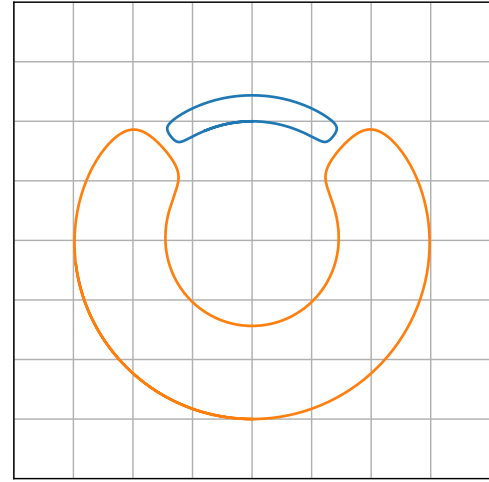


Рис. 5. Траектории спутников во вращающейся системе отсчёта (качественно). Для наглядности масштаб в радиальном направлении увеличен. Синяя кривая соответствует Янусу, оранжевая — Эпиметею

Запишем закон сохранения момента импульса. Поскольку орбиты считаются круговыми, инерциальная скорость спутника и переносная скорость вращающейся системы направлены по касательной к орбите. Поэтому их разность — скорость спутника во вращающейся системе отсчёта — также перпендикулярна радиус-вектору, проведённому из центра Сатурна:

$$L_i = m_i r_i u_i \approx -\frac{3}{2} m_i R \omega x_i. \quad (28)$$

ЗСМИ принимает вид

$$L_1 + L_2 = -\frac{3}{2} R \omega (m_1 x_1 + m_2 x_2) = \text{const}, \quad (29)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \text{const}. \quad (30)$$

В некоторый момент взаимодействия спутники оказываются на одной и той же орбите, $x_1 = x_2$. Выберем ω и, соответственно, R так, чтобы в этот момент $x_1 = x_2 = 0$. Тогда вдали друг от друга, когда $x_2 - x_1 = \Delta a$, выполняются равенства

$$x_{10} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \Delta a, \quad (31)$$

$$x_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta a. \quad (32)$$

На рис. 5 представлены траектории спутников в этой вращающейся системе отсчёта.

Теперь получим выражение для закона сохранения энергии. Запишем эффективную потенциальную энергию спутника во вращающейся системе отсчёта:

$$\begin{aligned}
U_i &= -\frac{GM_S m_i}{r_i} - \frac{m_i}{2} \omega^2 r_i^2 = -\frac{GM_S m_i}{R + x_i} - \frac{m_i}{2} \omega^2 (R + x_i)^2 \approx \\
&\approx -\frac{GM_S m_i}{R} \left(1 - \frac{x_i}{R} + \frac{x_i^2}{R^2}\right) - \frac{m_i}{2} \omega^2 R^2 \left(1 + 2\frac{x_i}{R} + \frac{x_i^2}{R^2}\right) \approx \\
&\approx U_{0i} + m_i R \left(\frac{GM_S}{R^3} - \omega^2\right) x_i - \left(\frac{GM_S m_i}{R^3} + \frac{m_i}{2} \omega^2\right) x_i^2,
\end{aligned} \quad (33)$$

где

$$U_{0i} = -\frac{GM_S m_i}{R} - \frac{m_i}{2} \omega^2 R^2 = \text{const}, \quad (34)$$

$$\frac{GM_S}{R^3} - \omega^2 = 0, \quad (35)$$

$$\frac{GM_S m_i}{R^3} + \frac{m_i}{2} \omega^2 = \frac{3}{2} m_i \omega^2. \quad (36)$$

То есть

$$U_i \approx U_{0i} - \frac{3}{2} m_i \omega^2 x_i^2, \quad (37)$$

и ЗСЭ принимает вид

$$\begin{aligned}
E_1 + E_2 + E_{12} &\approx \frac{m_1}{2} u_1^2 + U_{01} - \frac{3}{2} m_1 \omega^2 x_1^2 + \\
&+ \frac{m_2}{2} u_2^2 + U_{02} - \frac{3}{2} m_2 \omega^2 x_2^2 - \\
&- \frac{Gm_1 m_2}{l} = \text{const},
\end{aligned} \quad (38)$$

После подстановки выражений для линейных скоростей (27) имеем

$$\frac{3}{8} \omega^2 (m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2) + \frac{Gm_1 m_2}{l} = \text{const}. \quad (39)$$

Выражение в скобках слева всегда неотрицательно, причём равенство достигается только при $x_1 = x_2 = 0$, когда спутники находятся в точности на одной и той же орбите. Значит, именно в этот момент расстояние между спутниками наименьшее. Этот же вывод можно получить из более общих соображений, например из того факта, что в этот момент $\Delta\varphi$ достигает минимума.

Когда спутники находятся далеко друг от друга, их взаимодействием можно пренебречь и положить $Gm_1 m_2 / l \approx 0$. Приравняем значения энергии для двух состояний: когда спутники находятся далеко друг от друга и когда они движутся по общей орбите. Получим

$$\begin{aligned}
\frac{3}{8} \omega^2 (m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2) \frac{(\Delta a)^2}{(m_1 + m_2)^2} &= \\
= \frac{3}{8} \omega^2 m_1 m_2 \frac{(\Delta a)^2}{m_1 + m_2} &= \frac{Gm_1 m_2}{l_{\min}},
\end{aligned} \quad (40)$$

$$l_{\min} = \frac{8G(m_1 + m_2)}{3\omega^2 (\Delta a)^2} = \boxed{\frac{2G(m_1 + m_2) T^2}{3\pi^2 (\Delta a)^2}}. \quad (41)$$

3.3. ЗСЭ в ИСО

При рассмотрении движения в инерциальной системе отсчёта решение похоже на изложенное в предыдущем подразделе. Исходные формулы здесь проще, но требуется учитывать ЗСМИ до второго порядка малости. Кроме того, здесь следует *очень внимательно* следить за порядками, чтобы ничего не потерять.

В некоторый момент спутники оказываются на одной и той же орбите. Обозначим радиус этой орбиты через R , а расстояния от центра Сатурна до спутников в произвольный момент времени запишем как $r_i = R + x_i$, где $x_i \ll R$. В тот момент, когда спутники оказываются на одной орбите, $x_1 = x_2 = 0$.

Так как направление скорости всегда перпендикулярно радиус-вектору спутника из центра Сатурна,

$$\begin{aligned}
L_i &= m_i r_i v_i = m_i \sqrt{GM_S r_i} \approx \\
&\approx m_i \sqrt{GM_S R} \left(1 + \frac{x_i}{2R} - \frac{x_i^2}{8R^2}\right),
\end{aligned} \quad (42)$$

и ЗСМИ принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{L_1 + L_2}{\sqrt{GM_S R}} &= \\
&= (m_1 + m_2) + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{2R} - \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2}{8R^2} = \\
&= \text{const}.
\end{aligned} \quad (43)$$

В момент, когда спутники находятся на одной орбите, $x_1 = x_2 = 0$, поэтому

$$m_1 + m_2 + \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{2R} - \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2}{8R^2} = m_1 + m_2, \quad (44)$$

а в любой момент времени

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2}{4R}. \quad (45)$$

Теперь запишем ЗСЭ. Энергия i -го спутника на круговой орбите равна

$$E_i = -\frac{GM_S m_i}{2r_i} \approx -\frac{GM_S m_i}{2R} \left(1 - \frac{x_i}{R} + \frac{x_i^2}{R^2}\right), \quad (46)$$

$$\begin{aligned}
E_1 + E_2 + E_{12} &= \\
&= -\frac{GM_S}{2R} \left((m_1 + m_2) - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{R} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2}{R^2} \right) - \frac{Gm_1 m_2}{l} = \text{const},
\end{aligned} \quad (47)$$

$$\frac{3GM_S}{8R^3} (m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2) + \frac{Gm_1 m_2}{l} = \text{const}. \quad (48)$$

Как и ранее, приходим к выводу, что выражение в скобках слева всегда неотрицательно и минимальное расстояние между спутниками достигается на общей круговой орбите. Так как в (48) x_1 и x_2 входят только во второй степени, при установлении их связи с Δa можно ограничиться первым порядком малости. Именно поэтому при подстановке (45) в (47) необходимо сохранить члены, содержащие квадраты x_1 и x_2 .

Как и ранее,

$$x_{10} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \Delta a, \quad (49)$$

$$x_{20} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \Delta a. \quad (50)$$

Приравнивая значения энергии в два момента времени – на общей круговой орбите и на удалении спутников друг от друга, – получим

$$\begin{aligned} \frac{3GM_S}{8R^3} (m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2) \frac{(\Delta a)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \\ = \frac{3GM_S}{8R^3} m_1 m_2 \frac{(\Delta a)^2}{m_1 + m_2} = \frac{Gm_1 m_2}{l_{\min}}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$l_{\min} = \frac{8G(m_1 + m_2)}{3\omega^2(\Delta a)^2} = \boxed{\frac{2G(m_1 + m_2)T^2}{3\pi^2(\Delta a)^2}}. \quad (52)$$

Замечание. Может показаться, что разложения по малому параметру можно избежать, если использовать точные выражения для энергии спутников:

$$\frac{Gm_1 m_2}{l_{\min}} = \frac{GM_S m_1}{2(R + x_{10})} + \frac{GM_S m_2}{2(R + x_{20})} - \frac{GM_S(m_1 + m_2)}{2R}. \quad (53)$$

Однако значения x_{10} и x_{20} , определённые по формулам (49) и (50), получены из ЗСМИ только в первом порядке малости. Их подстановка в точное выражение для энергии непоследовательна и приводит к неверному ответу: 12 тыс. км, то есть 3/4 верной величины. Для корректного расчёта разложения ЗСМИ до первого порядка недостаточно.

4. Заключение

Задача изначально задумывалась как упражнение на работу с малыми величинами. Однако для решения второй части задачи необходимо понять, что спутники очень медленно обмениваются энергией. В качестве подсказки в условие было добавлено последнее предложение: сохранение круговых орбит возможно только в процессах, происходящих на протяжении многих орбитальных периодов.

Многие участники олимпиады пытались решить задачу, рассматривая гравитационный манёвр одного спутника относительно другого, полностью пренебрегая влиянием Сатурна и получая ответы порядка 5 км. Такое взаимодействие теоретически возможно, но противоречит условию, поскольку при нём круговые орбиты не сохраняются. Кроме того, оно приводит к физически нереалистичному ответу: минимальное расстояние между спутниками оказывается меньше их размеров, хотя взаимодействие периодически повторяется и такая конфигурация должна сохраняться длительное время.

Представленная задача иллюстрирует необходимость внимательно анализировать условие и соотносить сформулированные в нём допущения с их физическими следствиями. Полезно также проводить дополнительные оценки параметров. Хотя определять размеры спутников не требовалось, простейшая оценка сразу показала минимальный возможный порядок ответа.

Список литературы

- [1] Кондратьев Н. Е. 11 класс, задача № 6 // Всероссийская олимпиада школьников по астрономии. Заключительный этап. 2026. URL: <https://vos.astroedu.ru>.
- [2] How Janus' Orbital Swap Affects the Edge of Saturn's A Ring? / M. El Moutamid [и др.] // Icarus. 2016. Ноябрь. Т. 279. С. 125–140. ISSN 0019-1035. DOI: 10.1016/j.icarus.2015.10.025.
- [3] Theoretical Competition : Problem 12. Co-orbital Satellites // International Olympiad on Astronomy and Astrophysics. 2022. URL: <https://ioaastrophysics.org>.

Приложение А. Ещё одна задача по теме

Дополнение от редактора. Приводим перевод задачи, предложенной на Международной олимпиаде по астрономии и астрофизике (IOAA) 2022 года [3].

Условие задачи. В этой задаче применяется метод определения масс двух коорбитальных (*co-orbital*) спутников, движущихся по близким орбитам, разработанный Дермоттом и Мюрреем в 1981 году.

Пусть два малых спутника массами m_1 и m_2 движутся вокруг массивного центрального тела массой M по близким орбитам. В каждый момент орбиты спутников можно приближённо считать круговыми кеплеровскими орбитами с радиусами r_1 и r_2 соответственно, хотя вследствие гравитационного взаимодействия спутников эти радиусы со временем немного изменяются.

На рис. 6 схематически показаны орбиты во вращающейся системе отсчёта с началом в центральном теле, выбранной так, что суммарный момент импульса двух спутников в этой системе равен нулю.

Через θ обозначен угол $\angle m_1 M m_2$, через R – средний радиус орбит, а через x_1 и x_2 – радиальные отклонения спутников. Все ответы в этой задаче следует записывать в инерциальной системе отсчёта.

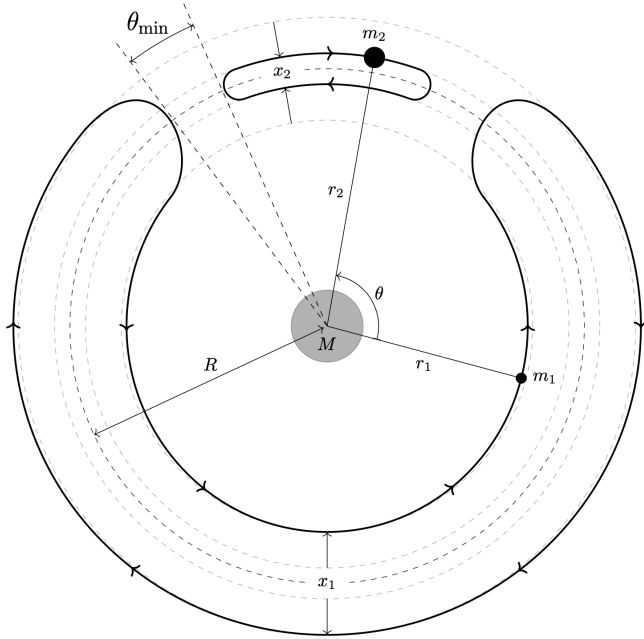


Рис. 6. Схематическое изображение орбит во вращающейся системе отсчёта

Сначала определим отношение m_1/m_2 .

- Запишите момент импульса L_i спутника массой m_i , движущегося по круговой орбите радиуса r_i .
- Суммарный момент импульса спутников $L_1 + L_2$ сохраняется. Пусть $x_1, x_2 \ll R$ – расстояния, показанные на рис. 6. Найдите простую связь между отношениями m_1/m_2 и x_1/x_2 .

Теперь определим сумму масс $m_1 + m_2$. В следующих пунктах будем использовать истинный барицентр системы, который может не совпадать с центром планеты.

- Моменты импульса спутников массами m_1 и m_2 изменяются со временем вследствие их гравитационного взаимодействия. Покажите, что скорость изменения момента импульса второго спутника приближённо равна

$$\frac{\Delta L_2}{\Delta t} \approx -\frac{G m_1 m_2}{R} \cdot h(\theta), \quad (54)$$

где

$$h(\theta) = \frac{\cos(\theta/2)}{4 \sin^2(\theta/2)} - \sin \theta. \quad (55)$$

- Покажите, что величина $s = r_2 - r_1$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \approx -2\sqrt{\frac{G}{MR}} (m_1 + m_2) \cdot h(\theta). \quad (56)$$

- Для угла $\theta = \angle m_1 M m_2$, показанного на рис. 6, найдите выражение для $\Delta\theta/\Delta t$.
- Используя полученные выше результаты, найдите связь между Δs и $\Delta\theta$.

После интегрирования полученного выше выражения имеем

$$\bar{x}^2 \approx \frac{4R^2}{3} \frac{m_1 + m_2}{M} \left[\frac{1}{\sin(\theta_{\min}/2)} - 2 \cos \theta_{\min} - 3 \right], \quad (57)$$

где

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (58)$$

Эпиметей (m_1) и Янус (m_2) – два спутника Сатурна, движущихся по близким орбитам. По результатам подробных наблюдений их орбит, выполненных космическими аппаратами «Вояджер-1» и «Кассини», $R = 150\,000$ км, $x_1 = 76$ км, а $x_2 = 21$ км. Минимальное расстояние между Янусом и Эпиметеем равно 13 000 км. Масса Сатурна равна $5.7 \cdot 10^{26}$ кг.

- Оцените массы Эпиметей и Януса.

Связь с задачей, рассмотренной в статье. В обозначениях настоящей статьи $\bar{x} \approx \Delta a$, $\theta_{\min} \approx \Delta\varphi_{\min}$. Если учесть, что $\Delta\varphi_{\min}$ мал, и принять $l_{\min} \approx R\Delta\varphi_{\min}$, а также

$$\frac{1}{\sin(\Delta\varphi_{\min}/2)} - 2 \cos \Delta\varphi_{\min} - 3 \approx \frac{2}{\Delta\varphi_{\min}}, \quad (59)$$

то можно заметить, что из формулы (57) непосредственно следует выражение (25) для $l_{\min}$. Некоторое различие численного результата для $l_{\min}$ и вышеприведённой величины обусловлено используемыми при решении основной задачи приближениями.

Астрономическое образование, 2026. Материал предоставлен на условиях лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 (С указанием авторства – С сохранением условий). Разрешено свободно делиться (обмениваться) – копировать и распространять материал на любом носителе и в любом формате в любых целях, включая коммерческие; адаптировать (создавать производные материалы) – делать ремиксы, видоизменять и создавать новое, опираясь на этот материал в любых целях, включая коммерческие; при условии обеспечения соответствующего указания авторства, предоставления ссылки на лицензию и обозначения изменений, если таковые были сделаны. Производные материалы должны распространяться на таких же условиях.